UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ – UVA

PRÓ-REITORIA DE EDUCAÇÃO CONTINUADA

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

APOSTILA – VERSÃO PRELIMINAR

<u>ELABORAÇÃO:</u>

PROFESSORES:

Francisco Wellington Ximenes de Menezes - UVA

Maria José Araújo Souza – UVA

Francisco José Mendonça do Vale – 6º CREDE

Sobral – Ceará

- 2008 -

SUMÁRIO

01. R A Z Ã O

01) DEFINIÇÃO :

Razão é o quociente da divisão entre dois números. Devem ser, portanto, tomados na mesma unidade com o segundo número diferente de zero.

A razão de dois números, ou, a razão entre dois números "a" e "b", por exemplo, é indicada das seguintes formas: a:b ou a/b, com $b \neq 0$, cuja leitura é feita a seguir:

"razão de **a** para **b** ou razão entre **a** e **b** ou **a** está para **b**."

Numa razão, temos que o 1° número é chamado de **antecedente** e o 2° número é chamado de **conseqüente.**

Assim : a : b ou a / b ou **a** $\rightarrow$ antecedente

b $\rightarrow$ consequente

02) DEFINIÇÕES GERAIS:

- **RAZÕES INVERSAS:** Duas razões são inversas quando vemos trocadas as posições de seus termos. Quando o antecedente de uma é conseqüente de outra e vice-versa.

  Assim temos: **4 / 5 e 5 / 4** $\rightarrow$ **posição inversa dos termos.**

- **RAZÕES IGUAIS:** Duas razões são iguais quando os produtos do antecedente de uma pelo conseqüente de outra são iguais.

  Assim temos:

  Se 6 / 8 e 3 / 4 são razões iguais, então indicamos pela igualdade: 6/8 = 3/4

  E provamos , pois: 6/8 = ¾

  $$6 \times 4 = 3 \times 8$$
  $$24 = 24$$

- **RAZÕES TOMADAS NAS MESMAS UNIDADES:** Numa razão , ao compararmos duas grandezas, devemos tomá-las nas mesmas unidades.

1) Exemplo: Determinar a razão entre 200 cm e 4m.

Devemos colocar os termos na mesma unidade (m ou cm). Para facilitar nosso trabalho, vamos colocar na unidade de **cm.**

Assim: $\dfrac{200cm}{4m} = \dfrac{200cm}{400cm} = \dfrac{2 \, . \, 100}{4 \, . \, 100} = 1 / 2$

2) Exemplo : Determinar a razão entre 36 cm^2 e 36 m^2

Devemos colocar os termos na mesma unidade: (cm^2 ou m^2). Para facilitar nosso trabalho, vamos colocar na unidade de $\mathbf{cm^2}$.

Assim: $\dfrac{36\ cm^2}{36m^2} = \dfrac{36cm^2}{360.000cm^2} = 1 / 10.000$.

3) Exemplo: Determinar a razão entre $2m^3$ e 6.000 dm^3 .

Devemos colocar os termos na unidade (m^3 ou dm^3). Para facilitar nosso trabalho, vamos colocar em $\mathbf{m^3}$.

Assim: $2m^3 / 6.000dm^3 = 2m^3 / 6\ m^3 = 1 / 3$

4) Exemplo: Determinar a razão entre 600L e $2m^3$.

Devemos colocar os termos na mesma unidade (Litros ou m^3). Para facilitar nosso cálculo, colocamos as unidades em litros.

Assim: $\frac{600L}{2m^3} = \frac{600L}{2.000L} = 6 / 20 = 3 / 10$

5) Exemplo: Determinar a razão entre 500g e 2,5Kg.

Devemos colocar os termos na mesma unidade (gramas ou quilogramas). Para facilitar nosso trabalho, colocamos as unidades em **g.**

Assim: $\frac{500g}{2{,}5Kg} = \frac{500g}{2.500g} = 5 / 25 = 1 / 5$

*** Nota:** Observe então que devemos cuidar para que na transformação das unidades tomemos aquela que seja a mais conveniente e facilite melhor o nosso trabalho.

6) Exemplo: Numa razão igual a 2 / 3 o dobro do consequente vale 5. Determine o antecedente da razão.

Fazendo **a** e **b** os termos da razão, temos: $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \rightarrow$ razão procurada.

Pelo problema, temos: $a / b = 2 / 3$ e $2b = 5$

$b = 5/2$

$$a / b = 2 / 3$$
$$a : 5/2 = 2 / 3$$
$$a = 2 / 3 \times 5 / 2$$
$$a = 5 / 3$$

Resposta: O antecedente é 5 / 3.

7) Exemplo: Calcular a razão entre $1\frac{2}{3}$ e $2\frac{4}{5}$

Devemos transformar os números mistos em frações.

$1\frac{2}{3} = \frac{1 \times 3 + 2}{3} = 5 / 3$

$2\frac{4}{5} = \frac{2 \times 5 + 4}{5} = 14 / 5$

Razão = 5 / 3 : 14 / 5

Razão = 5 / 3 x 5 / 14

Razão = 25 / 42

Resposta: 25 / 42

03) DÍZIMAS PERÍÓDICAS:

São números que apresentam na parte decimal (após a vírgula) algarismos que se repetem infinitamente. A dízima é o resultado da divisão entre os termos de uma fração. A fração que gerou a dízima chama-se **Geratriz.**

Quando dividimos o numerador de uma fração pelo denominador, poderá ocorrer uma geratriz. Geratriz é a fração que gerou a dízima periódica.

Assim sendo temos:

5 / 11 é a geratriz da dízima: 0,454545...

11 / 6 é a geratriz da dízima: 1,8333...

Na dízima, o número que se repete chama-se período. Como o período é infinito, podemos abreviá-lo escrevendo a dízima pondo-se um traço sobre os algarismos do período. Assim:

0,454545... = 0,45

1,833333... = 1,83

A dízima periódica pode ser Simples ou Composta, conforme os algarismos do período.

a) Dízima Periódica Simples:

A dízima periódica é simples quando na parte decimal (após a vírgula) tem-se os mesmos algarismos repetindo-se constantemente.

Vejamos:

0,333... = 0,3 $\rightarrow$ dízima periódica simples formada por 1(um) algarismo.

0,4343... = 0,43 $\rightarrow$ dízima periódica simples formada por 2(dois) algarismos.

b) Dízima Periódica Composta:

A dízima periódica é composta quando após a vírgula temos algarismos diferentes dos termos do período. Os algarismos distintos do período chama-se parte não-periódica.

Vejamos:

0,47272... = 0,472 $\rightarrow$ dízima periódica composta. Período: 72
não-período: 4

1,2333... = 1 + 0,23 $\rightarrow$ dízima periódica composta. Período: 3
não-período: 3

3,221313... = 3 + 0,2213 $\rightarrow$ dízima periódica composta. Período: 13
não-período: 22

3.1 - Cálculo da Geratriz:

Apresentamos aqui dois modos para se calcular a fração geratriz de uma dízima.

1º MODO: Método Algébrico.

2º MODO: Regra Prática..

1º MODO: Método Algébrico: Consiste em utilizar uma variável auxiliar e eliminar a parte periódica da dízima.

1) Exemplo: Encontrar a fração geratriz da dízima 0,333...

Fazemos: $x = 0{,}333...$

$10.x = 10 . 0{,}333...$

$10x = 3{,}333...$

$10x - x = 3{,}333... - 0{,}333...$

$9x = 3$

$x = 3 / 9$

$x = 1 / 3$

Resposta: A fração geratriz é 1 / 3.

2) Exemplo: Encontre a geratriz da dízima 1,454545...

Isolamos a parte inteira da periódica: 1,454545... = 1 + 0,454545...

Fazemos: $x = 0{,}454545...$

$100.x = 100 . 0{,}454545...$

$100x = 45{,}4545...$

$100x - x = 45{,}4545... - 0{,}4545...$

$99x = 45$

$x = 45 / 99$

$x = 15 / 33$

Como temos 1 + 0,454545... , fazemos: $1 + 15 / 33 = 48 / 33$

Resposta: A geratriz é a fração 48 / 33.

3) Exemplo: Encontrar a geratriz da dízima 1,3171717...

Isolamos a parte inteira da dízima: 1,3171717... = 1 + 0,3171717...

Fazemos $x = 0{,}3171717...$

$10x = 3{,}171717...$

Da expressão 3,171717... , fazemos: 3 + 0,171717...

Fazemos $y = 0{,}171717...$

$100y = 17{,}1717...$

$100y - y = 17{,}1717... - 0{,}1717$

$99y = 17$

$y = 17 / 99$

Voltando a expressão anterior temos: $3 + 0{,}1717... = 3 + 17 / 99 = 314 / 99$

$10x = 3{,}171717...$

$10x = 314 / 99$

$x = 314 / 990$

Como temos: 1 + 0,31717... , fazemos: $1 + 314 / 990 = 1304 / 990 = 652 / 495$

Resposta: A geratriz é a fração 652 / 495

2º MODO: Regra Prática:

a) Se a dízima periódica for Simples, temos a seguinte regra prática:

Na fração, o **numerador** é formado pelos algarismos do período e o **denominador** são tantos noves quantos forem os algarismos do período.

Vejamos:

0,777... = 0,7 → Apenas 1(um) algarismo no período. Logo: 7 / 9

0,2727... = 0,27 → Apenas 2(dois) algarismos no período. Logo: 27 / 99

1,234234234... = 1,234 → Apenas 3(três) algarismos no período.

Logo: 1 + 234 / 999 = 137 / 111 → fração geratriz.

b) Se a dízima periódica for Composta, temos a seguinte regra prática:

Na fração, o **numerador** é formado pela parte não-periódica anexada a parte periódica menos a parte não-periódica, e o **denominador** é formado por tantos noves quantos forem os algarismos do perído seguidos por tantos zeros quantos forem os algarismos do não-período.

De acordo com o enunciado, a **fração geratriz** da dízima periódica composta será encontrada pela relação abaixo:

$$\boxed{\text{Fração} = \frac{[\text{não-período}][\text{período}] - [\text{não-período}]}{[\text{noves pelo período}][\text{zeros pelo não-período}]}}$$

Qualquer que seja a dízima periódica é sempre válida a relação acima.

Podemos simplificar a relação acima para a seguinte expressão:

$$\boxed{\text{Fração} = \frac{[nP][P] - [nP]}{[9.P][0.nP]}}$$

onde temos:
nP → não-período
P → período
9.P → noves pelo período
0.nP → zeros pelo não-período

1) Exemplo: Encontrar a geratriz da dízima 0,31212...

$$\text{Fração} = \frac{[\text{não-período}][\text{período}] - [\text{não-período}]}{[\text{noves pelo período}][\text{zeros pelo não-período}]} = \frac{[3][12] - [3]}{[99][0]}$$

$$= \frac{312 - 3}{990}$$

= 309 / 990

= 103 / 330

Resposta: A fração geratriz é 103 / 330 .

2) Exemplo: Encontrar a geratriz da dízima 1,170707...

Isolamos a parte inteira da parte decimal: 1,170707... = 1 + 0,17070...

Fração = $\frac{[1][70] - [1]}{}$ = $\frac{170 - 1}{}$ = 169 / 990 → 1 + 169 / 990 = 1.159 / 990

[99][0]   990

Resposta: A fração geratriz é 1.159 / 990 .

3) Exemplo: Calcular a razão entre os números 0,373737... e 1,777...

Transformando as dízimas em geratrizes, temos:

0,373737... = 0,37 → **1º fração**: 0,37 = 37 / 99

1,777... = 1 + 0,777... = 1 + 0,7 → **2º fração**: 0,7 = 7 / 9 → 1 + 7/9 = 16 / 9

Razão = $\dfrac{37}{99} : \dfrac{16}{9}$

Razão = 37/99 x 9/16
Razão = 37 / 176

4) Exemplo: Calcular a razão entre os números 2,3111... e 1,2171717...

Transformando as dízimas em geratrizes, temos: 2,3111... = 2 + 0,31
1,21717... = 1 + 0,217

1º fração = $\dfrac{[3][1] - [3]}{[9][0]} = \dfrac{31 - 3}{90}$ = 28 / 90 = 14 / 45

Como temos: 2 + 0,31 fazemos: 2 + 14/45 = 104 / 45 → geratriz procurada

2º fração = $\dfrac{[2][17] - [2]}{[99][0]} = \dfrac{217 - 2}{990}$ = 215 / 990 = 43 / 198

Como temos: 1 + 0,217 fazemos: 1 + 43 / 198 = 241 / 198 → geratriz procurada

Razão = $\dfrac{104}{45} : \dfrac{241}{198}$

Razão = $\dfrac{104}{45} \times \dfrac{198}{241}$

Razão = $\dfrac{104}{241} \times \dfrac{22}{5}$

Razão = 2288 / 1205 → resposta.

04) RAZÕES ESPECIAIS:

Mostraremos a seguir três **razões** especiais nas quais aplicaremos a definição de razão. Nos itens a seguir veremos as razões: **- Velocidade Média**
- Densidade Demográfica
- Escala

4.1 - Velocidade Média: Chama-se Velocidade Média a razão entre uma distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la. Velocidade média é a razão entre o espaço e o tempo.

Assim temos:

Valocidade Média = $\frac{\text{distância}}{\text{tempo}}$ → $\boxed{Vm = d / t}$

Vm = velocidade média
d = distância
t = tempo

1) **Exemplo:** Um automóvel percorreu a distância de 540Km em 5 horas. Qual foi a velocidade média desse automóvel ?

distância percorrida: d = 540Km
tempo gasto: t = 5h
Velocidade Média: Vm = ?

Vm = d / t
Vm = 540Km / 5h
Vm = 108 Km/h

Resposta: Vm = 108 Km/h

2) **Exemplo:** Um móvel desenvolvendo uma velocidade de 150 Km/h percorre certa distância em certo tempo. Outro móvel gasta o dobro do tempo do primeiro para percorrer a mesma distância. Qual a velocidade do segundo móvel ?

Para o 1º móvel temos os dados: $V_1 = 150$ Km ; $d_1 = x$ e $t_1 = y$

Para o 2º móvel temos os dados: $V_2 = ?$; $d_2 = x$ e $t_2 = 2y$

Efetuando as razões entre as duas velocidades, temos:

$V_1 = d_1 / t_1 \rightarrow 150 = x / y$

$V_2 = d_2 / t_2 \rightarrow V_2 = x / 2y$

$$\rightarrow V_1 / V_2 = 150 / V_2 = x / y : x / 2y$$
$$150 / V_2 = x / y \;.\; 2y / x$$
$$150 / V_2 = 2$$
$$2 \,.\, V_2 = 150$$
$$V_2 = 150 / 2$$
$$V_2 = 75 \text{ Km / h}$$

Resposta: A velocidade do segundo móvel é 75 Km / h.

4.2 - Densidade Demográfica: Chama-se Densidade Demográfica de uma região a razão entre a população da região pela área da região. Densidade Demográfica é a média de habitantes por quilômetros quadrados. É representada por hab / Km^2.

Assim temos: Dd = $\frac{\text{população}}{\text{área}}$

$\boxed{Dd = P / A}$

Dd = densidade demográfica
P = população da região

A = área da região

1) Exemplo: Uma região apresenta uma população de 12.900.000 habitantes. Tendo uma extensão territorial de 300.000 km^2, qual sua densidade demográfica ?

Densidade demográfica: Dd = ?
População: P = 12.900.000 hab
Área: A = 300.000 km^2

Dd = P / A
Dd = 12.900.000 hab / 300.000 Km^2
Dd = 43 hab / Km^2

Resposta: 43 hab / Km^2

2) Exemplo: A densidade demográfica de uma região é de 15,5 hab / Km^2. Tendo uma população de 1.500.000 habitantes, qual a área da região ?

Densidade demográfica: Dd = 15,5 hab / Km^2
População: P = 1.500.000 hab
Área: A = ?

Dd = P / A
A = P / Dd
A = 1.500.000 / 15,5
A = 96.774,19 Km^2

Resposta: A área da região é 96.774,19 Km^2

3) Exemplo: Uma região de 17.577 Km^2 apresenta uma densidade demográfica de 13,5 hab / Km^2. Quantos habitam na região ?

Dd = 13,5 hab / Km^2
A = 170.577 Km^2
P = ?

Dd = P / A
P = Dd . A
P = 13,5 . 170.577
P = 2.372.895 hab

Resposta: A população da região é 2.372.895 habitantes.

4.3 - Escala:

Escala é a razão que se faz entre as dimensões (comprimento, largura e / ou altura) consideradas num desenho e a correspondente dimensão real do objeto.

Assim na escala abaixo temos :

a / b = 1 / 200 , (a) dimensão do desenho considerado e
(b) dimensão real do objeto correspondente.

A escala 1 / 200 mostra que as dimensões reais do objeto são 200 vezes maiores que as do desenho considerado.

1) Exemplo: Qual a escala da planta de um terreno de 100 metros de comprimento que foi representado por um segmento de 5cm ?

Resolução: A escala é dada fazendo-se a razão entre essas dimensões da seguinte forma:
Comprimento do terreno no desenho da planta: 5cm
Comprimento real do terreno: 100 metros = 10.000 cm

Escala = comprimento do desenho / comprimento real do terreno
Escala = 5 / 10.000
Escala = 1/ 2.000 ou 1 : 2.000

Resposta: O terreno está no desenho da planta na escala de 1 : 2.000

2) Exemplo: Num poster a imagem foi reduzida para um cartão de 5 cm de comprimento. Se a razão entre essas dimensões estão na escala de 1 : 80 , qual o comprimento do poster ?

Resolução : Fazendo a = comprimento no cartão , temos: a = 5cm
b = comprimento real do poster b = ?

$a : b = 1 : 80 \rightarrow 5 / b = 1 / 80$

$b = 5 . 80$

$b = 400$ cm

Resposta: O comprimento do poster é de 400 cm.

3) Exemplo: O comprimento de uma sala de aula foi comparado a de uma caixa de fósforos obtendo-se uma escala de 1 : 200 . Se o comprimento da caixa de fósforos é de 5 cm , qual o comprimento da sala de aula ?

Resolução: Fazendo a = 5cm comprimento da caixa de fósforo
b = comprimento da sala de aula
A escala é dada por: a : b = 5 : b
Logo temos:

$a : b = 1 : 200$

$5 / b = 1 / 200$

$b = 5 . 200$

$b = 1.000$ cm ou 10 metros

Resposta: O comprimento da sala é de 10 metros.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Achar a razão entre os seguintes números :

a) 16 e 3	d) 3 e 1 / 2	g) 1 3 / 4 e 2 1 / 2	j) 1,2 e 0,4
b) 27 e 9	e) 5 / 7 e 5	h) 1/3 e 0,2	l) 2,7 e 0,81
c) 5 e 7	f) 2 / 3 e 1 / 5	i) 0,3 e 2,1	m) 0,13 e 1,3

02. Achar a razão entre as grandezas :

a) 0,8 m e 2,5 m	g) 5 20,18 e 2121 ,12
b) 3,8 hg e 0,01kg	h) 14:30 min e 17: 50 min
c) 0, 04m^2 e 200 cm^2	i) 13 d 4h e 13 d 6 h
d) 2. 300 dm^3 e 4, 6 m^3	j) 12 h 55 min 43 seg e 9 h 14 min 5 seg
e) 2 40mm e 5 20cm	l) 12 h 55 min 43 seg e 9 h 14 min 5 seg

f) 8 30g e 2 50hg

03. Escrever uma razão igual a 3 / 4 com o consequente 12.

04. Qual é o consequente de uma razão igual a 3 / 5 cujo antecedente vale 12 ?

05. O triplo do consequente de uma razão igual a 3 / 7 é 63 . Qual é o antecedente ?

06. A metade do antecedente de uma razão igual a 4 / 7 é 1 . Achar o consequente ?

07. Escrever V (verdadeiro) ou F (falso) nas sentenças:

a) a razão 3 / 4 é equivalente a 6 / 8
b) a razão 2 / 5 é equivalente a 22 / 55
c) o inverso da razão 3 / 5 é 5 /3
d) o inverso da razão 2 / 3 é 12
e) a razão 3 / 5 é equivalente a 12 / 15
f) a razão 3 / 7 é equivalente a $3^2 / 7^2$

08. Uma classe tem 35 alunos dos quais 14 são moças. Escrever as razões :
a) entre o número de rapazes e o número de moças.
b) entre o número de moças e o número de rapazes.

09. A população de um país é de 5.811.000 habitantes. Sendo sua densidade demográfica de 30 hab / Km^2, qual a área desse país ?

10. A escala adotada em um mapa é de 1 : 3.000. Se no mapa a distância entre dois pontos for de 7cm, qual a distância real entre esses pontos ?

11. Um carro e uma moto gastam o mesmo tempo para percorrer 240Km e 100Km respectivamente. Qual a razão entre as velocidades da moto e do carro ?

12. Num domingo, na sessão das 14 horas, entraram 1.500 pessoas num cinema, sendo que 900 pagaram somente 1 / 2 entrada. Qual a razão entre o número das pessoas que pagaram 1 / 2 e o número restantes ?

13. Dois quadrados tem, respectivamente, 3 cm e 6 cm de lado. Qual a razão entre as superfícies do primeiro e do segundo ?

14. A extensão territorial de uma região é de 125.000 Km^2. Apresenta uma densidade demográfica de 13,5 hab / Km^2. Quantos habitam na região ?

15. Numa residência, a razão entre a área construída e a área livre é de 2 / 3. Sabendo-se que a área construída é de 90m^2 , qual a área total do terreno ?

16. Numa classe mista a razão entre o número de meninos e o número de meninas é 3 / 2 . Sabendo-se que o número de meninos é 18, qual o número de alunos dessa classe ?

17. Numa classe de 40 alunos, 8 foram reprovados. Qual a razão entre as reprovações e as aprovações nessa classe ?

18. A distância entre duas cidades no mapa é de 5cm. Sendo a escala no mapa de 1 : 400, qual a distância real entre as cidades ?

19. Num tanque de combustível há 5 litros de óleo e 25 litros de querosene. Quais são as razões entre:

a) o óleo e o querosene ? b) o óleo e a mistura ? c) o querosene e a mistura ?

20. Tenho uma fotografia (3 x 4) cm e quero ampliá-la numa escala de 1 : 50. Quais serão as novas dimensões do retrato ?

21. A miniatura de um automóvel tem as seguintes dimensões: largura 2cm ; altura 3cm e comprimento 5cm. Se essas dimensões foram deduzidas na escala de 1 : 100 , quais as dimensões reais do automóvel em metros ?

22. Sobre a mesa de meu escritório há uma réplica miniaturizada de uma palmeira de 30m de altura. Sabendo-se que a altura da palmeira foi reduzida na escala de 1 : 200 , qual a altura da palmeira miniaturizada em cm ?

23. A razão entre as velocidades de uma moto e um carro é de 1,2 Km / h. Se o carro percorrer 240 Km em 2 horas, qual será a velocidade da moto ?

24.A densidade demográfica de uma região é de 12,5 hab / Km^2. Sendo a população de 540.000 habitantes, qual a área da região ?

25. A razão entre as velocidades de dois ciclistas é 1,7. O primeiro ciclista percorre 200 Km em certo tempo. O segundo gastou uma hora a mais que o primeiro percorrendo 300 Km. Quanto tempo cada ciclista gastou no que percorreu ?

26. Um automóvel tem 7 metros de comprimento. Construindo-se uma miniatura desse veículo representando seu comprimento por 7 cm, qual será a escala adotada ?

27. Dois ciclistas partem de um mesmo ponto A e chegam a um ponto B. O primeiro percorre 1.000 metros em 20 seg. e segundo ciclista percorre 1.200 metros em 30 seg. Qual a razão entre as velocidades do 1º e do 2º ciclista ?

02. P R O P O R Ç Ã O

1. DEFINIÇÃO :

Proporção é a igualdade entre duas razões.

Sendo a / b e c / d, duas razões iguais , dizemos que formam uma proporção e indicamos por: a / b = c / d.

A leitura de uma proporção é dada assim: **a** está para **b** assim como **c** está para **d.**

Para facilitar a identificação dos termos da proporção a / b = c / d , podemos dispô-la da seguinte forma : a : b = c : d .

Observe que os termos que ficam dispostos nas laterais (**a** e **d**) são chamados de **extremos**; e os outros dois termos (**b** e **c**) que ficam entre **a** e **d** são chamados de **meios**. Podemos então identificar os termos de uma proporção como segue: a : b = c : d , ou seja **b** e **c** são os meios e **a** e **d** são os extremos.

2. PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DAS PROPORÇÕES :

Numa proporção: a / b = c / d , o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Assim, dada a proporção a : b = c : d , temos:

b . c = a . d

produto dos meios ⇙ = ⇘ produto dos extremos

* **Exemplo:** Dada a proporção 2 / 3 = 4 / 6 , verificar a propriedade fundamental das proporções .

2 / 3 = 4 / 6 → 2 : 3 = 4 : 6

O produto dos meios é igual ao produto dos extremos → 3 x 4 = 2 x 6

12 = 12

3. **PROPRIEDADE DA PERMUTAÇÃO DOS TERMOS** :

Os termos de uma proporção podem ser escrito de oito formas diferentes , que se dá permutando-se os termos ou invertendo as razões.

1ª) 2 \ 7 = 4 / 14
2ª) 2 / 4 = 7 / 14 → permutando os meios
3ª) 14 / 7 = 4 / 2 → permutando os extremos
4ª) 14 / 4 = 7 / 2 → permutando os meios e os extremos
5ª) 7 / 2 = 14 / 4
6ª) 4 / 2 = 14 / 7 → invertendo os termos da 1ª , 2ª , 3ª e 4ª proporção .
7ª) 7 / 14 = 2 / 4
8ª) 4 / 14 = 2 / 7

4. **RESOLUÇÃO DE UMA PROPORÇÃO**:

Resolver uma proporção é determinar o valor de um termo desconhecido para o qual a igualdade se torne verdadeira. Para isso aplicamos a propriedade fundamental das proporções.

1) Exemplo: Resolver a proporção $x : 25 = 8 : 10$

O produto dos meios é igual ao produto dos extremos: $25 \cdot 8 = x \cdot 10$

$$200 = 10.x$$
$$x = 200 / 10$$
$$x = 20$$

2) **EXEMPLO:** Determinar o valor de y na proporção $\frac{2 / x}{1 / 3} = \frac{2 / 3}{2 / 9}$

O produto dos meios é igual ao produto dos extremos: $\frac{2}{x} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$

$$4 / 9x = 2 / 9$$
$$4 \cdot 9 = 18.x$$
$$36 = 18x$$
$$x = 36 / 18$$
$$x = 2$$

Resposta: $x = 2$

5 . QUARTA PROPORCIONAL DE TRÊS NÚMEROS DADOS :

Chama-se **quarta proporcional** de três números dados, um quarto número desconhecido que formam com os três dados, na ordem em que se apresentam, uma proporção. Para isso , recorremos a propriedade fundamental das proporções.

1) **Exemplo:** Determinar a quarta proporcional dos números 9, 12 e 15.

Devemos achar o número "x" que forme com os números dados uma proporção.

Assim: 9, 12, 15, x $\rightarrow$ quarta proporcional

Proporção: $9 : 12 = 15 : x \rightarrow 9 / 12 = 15 / x$

$$9.x = 12 \cdot 15$$
$$x = 180 / 9$$
$$x = 20$$

Resposta: $x = 20$.

2) Exemplo: Determinar a quarta proporcional dos números 3 , 5 e 6.

Quarta proporcional $\rightarrow$ x

Proporção: $3 : 5 = 6 : x \rightarrow 3 / 5 = 6 / x$

$$3x = 30$$
$$x = 10$$

Resposta: $x = 10$.

6 . PROPORÇÃO CONTÍNUA - TERCEIRA PROPORCIONAL - MÉDIA PROPORCIONAL :

Proporção Contínua é aquela em que os meios são iguais.
Assim , temos:
$2 : 4 = 4 : 8 \rightarrow$ os meios são iguais: $4 = 4$
$1 / 3 = 3 / 9 \rightarrow$ os meios são iguais: $3 = 3$

Numa proporção contínua, o último termo chama-se **terceira proporcional** dos outros dois, e o meio comum chama-se média proporcional (ou geométrica) dos números que formam os extremos.

Assim, dada a proporção contínua $36 : 12 = 12 : 4$, temos que:
$12 \rightarrow$ é a média proporcional ou média geométrica de 36 e 4.
$4 \rightarrow$ é a terceira proporcional dos números 36 e 12

Chama-se **terceira proporcional** de dois números dados **a** e **b,** um terceiro número **x** que forma com estes dois, repetindo-se o segundo, uma proporção.
Assim: $x \rightarrow$ terceira proporcional de **a** e **b**
Proporção: $a : b = b : x$
Sendo: $b \rightarrow$ a média proporcional ou média geométrica entre **a** e **x.**

1) **Exemplo:** Calcule a terceira proporcional e a média proporcional dos números 8 e 2.
Terceira proporcional $\rightarrow x$
Proporção contínua $\rightarrow 8 : 2 = 2 : x$

$$8 / 2 = 2 / x$$
$$8.x = 4$$
$$x = 4 / 8$$
$$x = 1 / 4$$

O meio comum é a média proporcional ou geométrica dos números 8 e 1/ 4
A média proporcional é o número 2

Resposta : terceira proporcional $\rightarrow$ 1/ 2
média proporcional $\rightarrow$ 2

2) Exemplo: Determine a terceira proporcional e a média proporcional dos números 2 / 3 e 3 / 5 .
Terceira proporcional $\rightarrow x$
Proporção contínua $\rightarrow 2 / 3 : 3 / 5 = 3 / 5 : x$

$$3 / 5 . 3 / 5 = 2 / 3 . x$$
$$9 / 25 = 2 / 3 . x$$
$$x = 9 / 25 : 2 / 3$$
$$x = 9 / 25 . 3 / 2$$
$$x = 27 / 50$$

O meio comum é média proporcional ou média geométrica dos números 2/ 3 e 27/50.
A média proporcional é o número 3 / 5

Resposta: terceira proporcional $\rightarrow$ 27 / 50
média proporcional $\rightarrow$ 3 / 5.

7. PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DAS PROPORÇÕES:

Considerando uma proporção qualquer escrita na forma fracionária, por exemplo, a / b = c / d ou a : b = c : d , onde: **a** é o primeiro termo
b é o segundo termo
c é o terceiro termo, e
d é o quarto termo.

Ou ainda: **a** → antecedente e **c** → antecedente
b → consequente **d** → consequente

A partir dessa proporção, podemos enunciar as seguintes propriedades:

7.1 - Propriedades da Soma:

a) Propriedade I: Dada a proporção a / b = c / d , enunciamos que em toda proporção , a soma dos dois primeiros está para o primeiro ou para o segundo assim como a soma dos dois último está para o terceiro ou para o quarto.

De acordo com o enunciado, temos:

$$a / b = c / d \rightarrow \frac{(a+b)}{a} = \frac{(c+d)}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{(a+b)}{b} = \frac{(c+d)}{d}$$

1) Exemplo: Determinar dois números cuja soma vale 45 e que a razão entre eles é de 2 para 3 .

Resolução: Fazendo "a " e "b" os números procurados, temos:
A soma dos números vale: a + b = 45
A razão entre eles é: a / b = 2 / 3

Aplicando a propriedade I da soma, temos: a / b = 2 / 3 → (a + b) / a = (2 + 3) / 2
45 / a = 5 / 2
5a = 90
a = 90 / 5
a = 18

Como: a + b = 45
b = 45 - a
b = 45 - 18
b = 27

Resposta: Os números procurados são 18 e 27.

2) Exemplo: Para pintar duas salas de cor cinza um pintor dispõe de 1 litro de tinta preta e 3 litros de tinta branca. Se ele precisa de 32 litros de mistura, quantos litros de cada cor irá comprar para manter a tonalidade da cor cinza ?

Resolução: Para manter a tonalidade da cor cinza, deverá comprar litros de tinta na razão de 1 / 3.
Assim, temos:
Litros de tinta preta → x
Litros de tinta branca → y
Razão → x / y = 1 / 3
Mistura → x + y = 32

$$x / y = 1 / 3$$
$$\frac{x+y}{x} = \frac{1+3}{1}$$
$$32 / x = 4 / 1$$
$$x = 32 / 4$$
$$x = 8$$

x + y = 32
8 + y = 32
y = 32 - 8
y = 24

Resposta: Deve comprar 8L de tinta preta e 24L de tinta branca.

b) Propriedade II: Dada a proporção a / b = c / d , enunciamos que em toda proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes assim como cada antecedente está para seu consequente.

De acordo com o enunciado, temos:

$$a / b = c / d \rightarrow \frac{(a + c)}{b + d} = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{(a + c)}{(b + d)} = \frac{c}{d}$$

1) Exemplo: Determinar x e y na proporção x / 8 = y / 12, sabendo que x + y = 100.

Resolução: Aplicando a propriedade II da soma, temos:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{12} \rightarrow \frac{(x + y)}{(8 + 12)} = \frac{x}{8} \quad \text{ou} \quad \frac{(x + y)}{(8 + 12)} = \frac{y}{12}$$

$$\begin{array}{rcl|rcl}
x + y /20 & = & x / 8 & x + y / 20 & = & y / 12 \\
100 / 20 & = & x / 8 & 100 / 20 & = & y / 12 \\
20x & = & 800 & 20y & = & 1200 \\
x & = & 800 / 20 & y & = & 1200 / 20 \\
x & = & 40 & y & = & 60
\end{array}$$

Resposta: x = 40 e y = 60.

2) **Exemplo:** O perímetro de um terreno retangular mede 20 metros. Se as dimensões do terreno então entre si como 3 está para 5, qual a área do terreno ?

Resolução: Dimensões do terreno: largura $\rightarrow$ x

comprimento $\rightarrow$ y

O perímetro do terreno é dado por: 2x + 2y = 20 , logo: x + y = 10

Razão entre as dimensões: x / y = 3 / 5 $\rightarrow$ x / 3 = y / 5

A área do terreno é dada por: A = x . y

Aplicando a propriedade II da Soma, temos:

$$x/3 = y/5 \rightarrow \frac{x + y}{3 + 5} = \frac{x}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{x + y}{3 + 5} = \frac{y}{5}$$

$$x + y = 10 \rightarrow \frac{10}{8} = \frac{x}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{10}{8} = \frac{y}{5}$$

$$\begin{array}{rcl c rcl}
8.x & = & 3 . 10 & \text{ou} & 8.y & = & 5 . 10 \\
x & = & 30 / 8 & \text{ou} & y & = & 50 / 8 \\
x & = & 3{,}75 & \text{e} & y & = & 6{,}25
\end{array}$$

Logo a área do terreno é: A = x . y

A = 3,75 . 6,25

A = 23,44m^2

Resposta: A área do terreno mede 23,44m^2 .

7. 2 - Propriedades da Diferença:

a) Propriedade I: Dada a proporção a / b = c / d, enunciamos que em toda proporção, a diferença entre os dois primeiros termos está para o primeiro ou para o segundo, assim como a diferença entre os dois últimos está para o terceiro ou para o quarto termo.

De acordo com o enunciado, temos :

$$a / b = c / d \rightarrow \frac{b - a}{b} = \frac{d - c}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{b - a}{a} = \frac{d - c}{c}$$

1) Exemplo: Determinar dois números cuja diferença vale 30 e que a razão entre eles seja de 3 / 2.

Resolução: Fazendo "x " e "y " os números procurados, temos: x - y = 30 e x / y = 3 / 2

Aplicando a propriedade I da diferença, temos: x / y = 3 / 2 → x - y / x = 3 - 2 / 3

30 / x = 1 / 3

x = 3 . 30

x = 90

Como: x - y = 30, temos:

x - y = 30

90 - y = 30

90 - 30 = y

y = 60

Resposta: x = 90 e y = 60 .

2) Exemplo: O comprimento de um terreno excede a largura em 5 metros. Se a razão entre as dimensões é igual a 4 / 3, determine:

a) as dimensões do terreno

b) o perímetro do terreno

c) a área do terreno

a) Resolução: Fazendo x → o comprimento

y → a largura

Pelo problema temos que: x - y = 5

x / y = 4 / 3

Aplicando a propriedade I da Diferença, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{x - y}{x} = \frac{4 - 3}{4} \rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1}{4} \rightarrow x = 5 . 4 \rightarrow x = 20$$

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{x - y}{y} = \frac{4 - 3}{3} \rightarrow \frac{5}{y} = \frac{1}{3} \rightarrow y = 5 . 3 \rightarrow y = 15$$

Ou ainda podia ser feito: x - y = 5 Como x = 20, temos: x - y = 5

y = x - 5

y = 20 - 5

y = 15

As dimensões do terreno são: comprimento → 20m

largura → 15m

b) O perímetro do terreno é dado por: P = 2x + 2y

P = 2.(20) + 2.(15)

P = 40 + 30

$$P = 70m$$

c) A área do terreno é dada por: $A = \text{comprimento x largura}$

$$A = 20 . 15$$
$$A = 300m^2$$

Respostas: a) 20m e 15m
b) P = 70m
c) $A = 300m^2$

b) Propriedade II: Dada a proporção a / b = c / d, enunciamos que em toda proporção, a diferença entre os antecedentes está para a diferença entre os consequentes assim como cada antecedente está para seu consequente.

De acordo com o enunciado, temos:

$$a / b = c / d \rightarrow \frac{(c - a)}{(d - b)} = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{(c - a)}{(d - b)} = \frac{c}{d}$$

1) Exemplo: Determinar x e y na proporção x / 10 = y / 7, sabendo que x - y = 21

Resolução: Aplicando a propriedade II da diferença, temos:

$$x / 10 = y / 7 \rightarrow x - y / 10 - 7 = x / 10 \quad \text{ou} \quad x - y / 10 - 7 = y / 7$$
$$\text{Como: } x - y = 21 \rightarrow 21 / 3 = x / 10 \quad \text{ou} \quad 21 / 3 = y / 7$$
$$3.x = 21 . 10 \quad \text{ou} \quad 3y = 21 . 7$$
$$x = 210 / 3 \quad \text{ou} \quad y = 147 / 3$$
$$x = 70 \quad \text{ou} \quad y = 49$$

Resposta: x = 70 e y = 49.

2) Exemplo: Antônio é mais velho que Jocel em 25 anos. A razão entre as idades é de 4/9. Determine as idades de cada um.

* Resolução: Fazendo A $\rightarrow$ a idade de Antônio
J $\rightarrow$ a idade de Jocel

A razão entre as idades é: J / A = 4 / 9
Pelo problema, temos que: A - J = 25
Aplicando a propriedade II da diferença, temos:

$$\frac{J}{A} = \frac{4}{9} \rightarrow \frac{A}{9} = \frac{J}{4} \rightarrow \frac{A - J}{9 - 4} = \frac{A}{9} \quad \text{ou} \quad \frac{A - J}{9 - 4} = \frac{J}{4} \rightarrow \frac{25}{5} = \frac{A}{9} \quad \text{ou} \quad \frac{25}{5} = \frac{J}{4}$$
$$5.A = 225 \qquad 5.J = 100$$
$$\mathbf{A = 45} \qquad \mathbf{J = 20}$$

* Resposta: Antônio tem 45 anos e Jocel tem 20 anos.

7.3 - Propriedade do Produto: Dada a proporção a / b = c / d, enunciamos que em toda proporção, o produto do antecedentes está para o produto dos consequentes assim como o quadrado de cada antecedente está para o quadrado de cada consequente.

De acordo com o enunciado, temos:

$$a / b = c / d \rightarrow \frac{(a.c)}{(b.d)} = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{ou} \quad \frac{(a.c)}{(b.d)} = \frac{c^2}{d^2}$$

Observe que se $\frac{(a.c)}{(b.d)} = \frac{a^2}{b^2}$ e $\frac{(a.c)}{(b.d)} = \frac{c^2}{d^2}$, então: $a^2 / b^2 = c^2 / d^2$

$$(a / b)^2 = (c / d)^2$$

$$a / b = c / d$$

1) Exemplo: Determinar dois números cujo produto entre eles é 54 o que estão entre si como 2 está para 3.

Resolução: Aplicando a propriedade do produto das proporções, temos:

Os números procurados são: x e y

O produto entre eles é: $x \cdot y = 54$

A razão entre eles vale: $x / y = 2/3$

$x / y = 2 / 3 \rightarrow x / 2 = y / 3 \rightarrow$ permutando-se os meios.

$$x / 2 = y / 3$$

$$x \cdot y / 2 \cdot 3 = x^2 / 2^2$$

$$54 / 6 = x^2 / 4$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6$$

Como: $x \cdot y = 54$

$$6 \cdot y = 54$$

$$y = 54 / 6$$

$$y = 9$$

Resposta: $x = 6$ e $y = 9$.

2) Exemplo: A área de um terreno retangular é de $24m^2$. Quais as dimensões do terreno se a razão entre elas é de $2 / 3$?

Resolução: Área do terreno $\rightarrow 24m^2$

Dimensões do terreno $\rightarrow$ largura: x

comprimento: y

Área do terreno $\rightarrow x \cdot y = 24m^2$

Razão entre as dimensões $\rightarrow x / y = 2 / 3 \rightarrow x / 2 = y / 3$

Aplicando-se a propriedade do produto: $\frac{x \cdot y}{2 \cdot 3} = \frac{x^2}{2^2}$ ou $\frac{x \cdot y}{2 \cdot 3} = \frac{y^2}{3^2}$

$$24 / 6 = x^2 / 4 \quad \text{ou} \quad 24 / 6 = y^2 / 9$$

$$x^2 = 16 \quad \text{ou} \quad y^2 = 36$$

$$x = 4 \quad \text{ou} \quad y = 6$$

Resposta: As dimensões do terreno são: comprimento 6m e largura 4m.

8 . PROPORÇÃO MÚLTIPLA - SÉRIE DE RAZÕES IGUAIS:

Chamamos de Proporção Múltipla a uma série de razões iguais em que verificamos a igualdade entre mais de duas razões. Assim, temos: $a/b = c/d = x/y = m/n = p/q$

Nesta série de razões iguais vemos que “a está para b, assim como c está para d, assim com x está para y, assim como m está para n, assim como p está para q “.

Mesmo numa série de razões iguais continua sendo válida a propriedade fundamental das proporções. Logo, temos:

$a \cdot d = b \cdot c = x \cdot n = m \cdot y = n \cdot p = m \cdot q$

Numa serie de razões iguais continua sendo válida também as propriedades da soma da diferença das proporções. Assim, podemos enunciar a seguinte Propriedade da Proporção Múltipla: **"Em toda proporção múltipla a soma ou a diferença entre os antecedentes está para a soma ou diferença entre os consequentes assim como dada antecedente esta para cada consequente".**

De acordo com o enunciado, temos:

$x/y = a/b = m/n \rightarrow (x + a + m) / (y + b + n) = x / y = a / b$ ou m / n

$(x - a - m) / (y - b - n) = x / y = a / b$ ou m / n

$(x + a + m) / (y + b + n) = x / y = a / b$ ou m / n

$(x - a + m) / (y - b + n) = x / y = a / b$ ou m / n

1) **Exemplo:** Verificar a proporção entre as razões $2 / 3 = 4 / 6 = 6 / 9 = 12 / 18$

Resolução: Verificando se há proporção entre a primeira e as demais temos:

$2/3 = 4/6 \rightarrow 2 \cdot 6 = 4 \cdot 3$
$12 = 12$

$2 / 3 = 6 / 9 \rightarrow 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$
$18 = 18$

$2 / 3 = 12 / 18 \rightarrow 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12$
$36 = 36$

Resposta: Logo a série de razões formam uma proporção múltipla.

2) Exemplo: Determinar x , y e z na proporção múltipla $x / 2 = y / 4 = z / 7$ sabendo que $x + y + z = 65$

Resolução: Aplicando a propriedade da proporção múltipla, temos:

$x / 2 = y / 4 = z / 7 \rightarrow (x + y + z) / (2 + 4 + 7) = x / 2$ ou $y / 4$ ou $z / 7$

$(x + y + z) / (2 + 4 + 7) = x / 2 \rightarrow 65/13 = x/2 \rightarrow 13x = 65 \cdot 2 \rightarrow \underline{x = 10}$

$(x + y + z) / (2 + 4 + 7) = y / 4 \rightarrow 65/13 = y/4 \rightarrow 13y = 4 \cdot 65 \rightarrow \underline{y = 20}$

$(x + y + z) / (2 + 4 + 7) = z / 7 \rightarrow 65/13 = z/7 \rightarrow 13z = 65 \cdot 7 \rightarrow \underline{z = 35}$

Resposta: Os números valem: $x = 10$, $y = 20$ e $z = 35$

3) Exemplo: Determine três números cuja soma é 105, sabendo que o primeiro está para 2 assim como o segundo está para 5 e assim como o terceiro está para 8.

Resolução: Chamando de **x**, **y** e **z** os números procurados, temos conforme o enunciado:

$x + y + z = 105 \rightarrow$ a soma dos três números é 105.

$x / 2 = y / 5 = z / 8 \rightarrow$ o primeiro está para 2, o segundo está para 5, o terceiro está para 8.

Pela propriedade das proporções múltiplas, temos:

$$x / 2 = y / 5 = z / 8 \rightarrow \frac{x + y + z}{2 + 5 + 8} = \frac{105}{15} = 7$$

$$\frac{x + y + z}{2 + 5 + 8} = x / 2 \quad \text{ou} \quad \frac{x + y + z}{2 + 5 + 8} = y / 5 \quad \text{ou} \quad \frac{x + y + z}{2 + 5 + 8} = z / 8$$

$x / 2 = 7$	$y / 5 = 7$	$z / 8 = 7$
$x = 2 . 7$	$y = 5 . 7$	$z = 8 . 7$
$x = 14$	$y = 35$	$z = 56$

Resposta: Os números procurados são: 14, 35 e 56.

4) Exemplo: Um pai gasta R$ 840,00 com as mesadas de seus três filhos, distribuindo de acordo com as idades de cada um. O 1º filho tem 10 anos; o 2º filho tem 15 anos; e o 3º filho tem 17 anos. Qual a mesada de cada um ?

Resolução: Fazendo: $x \rightarrow$ a mesada do 1º filho
$y \rightarrow$ a mesada do 2º filho
$t \rightarrow$ a mesada do 3º filho
$x + y + t = 840 \rightarrow$ gasto do pai com a mesada dos filhos.
$x / 10 + y / 15 = t / 17 \rightarrow$ A mesada do 1º filho está para a sua idade, assim como a mesada do 2 º filho está para sua idade, assim como a idade do 3º filho está para a sua idade.

Pela proporção múltipla, temos que: $x / 10 + y / 15 = t / 17$
$x + y + t = 840$

$$x / 10 + y / 15 = t / 17 \rightarrow \frac{x + y + t}{10 + 15 + 17} = \frac{840}{42} \rightarrow \frac{x + y + t}{42} = 20 \quad \text{ou}$$

$x / 10 = 20 \rightarrow x = 10 . 20$	$y / 15 = 20 \rightarrow y = 15 . 20$	$t / 17 = 20 \rightarrow t = 17 . 20$
$x = 200$	$y = 300$	$t = 340$

Resposta: 1º filho $\rightarrow$ R$ 200,00 ; 2º filho $\rightarrow$ R$ 300,00 e 3º filho $\rightarrow$ R$ 340,00 .

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Determine o valor do termo desconhecido nas proporções abaixo:
a) $2/3 : 3 = 4x : 6/5 \rightarrow x = 1/15$
b) $(2 - 1/3) : x = (1/2 + 3/4) : 15 \rightarrow x = 100/7$
c) $(7/3 + 1/2) : x = (4/2 - 3/5) : 5 \rightarrow x = 425/42$
d) $(1 - 1/2) : x = (1 - 1/4) : 6 \rightarrow x = 16/3$
e) $(4/3 - 2/5) : 3/5 = x : (7/3 + 2) \rightarrow x = 14/39$
f) $(3 + 0.4) : (5 - 1/2) = (1.2 - 1.5) : x \rightarrow x = 68/90$
g) $(3 + x) / 10 = 9/5 \rightarrow x = 15$

h) 3 / (x - 1) = 4/8 $\rightarrow$ x = 7
i) 2/3 = x/ (x + 2) $\rightarrow$ x = 4
j) 1 + 3/x = 1 / 4 $\rightarrow$ x - 4
l) 2 / (2x-1) = 5 / (x + 1) $\rightarrow$ x = 7 / 8
m) 3 / (4x + 1) - 2 / (1 - x) = 0 $\rightarrow$ x = 1 / 11
n) 5 / x - 1 / 2 = 3 / x $\rightarrow$ x = 4
o) 2 / (x - 1) = 3 / (1 - 2 x) $\rightarrow$ x = 5 / 7
p) (8 - x) (8 + x) = 2 / 5 $\rightarrow$ x = 24 / 7
q) 7 / 3 - x / 5 = x - 0,2 / 3 $\rightarrow$ x = 1
r) (2 + x) / 2 = (1 - x) / 3 $\rightarrow$ x = 4/5
s) (2x - 1) / 3 = (1 - 2x) / 2 $\rightarrow$ x = 5 / 12

02. Determinar a quarta proporcional dos números dados abaixo:
a) 8, 12 e 10 $\rightarrow$ x = 15
b) 6, 15 e 18 $\rightarrow$ x = 45
c) 3/4, 2/3 e 5/6 $\rightarrow$ x = 10/9
d) 1/2, 2/3 e 4/6 $\rightarrow$ x = 8/9
e) 3/4, 2/3 e ½ $\rightarrow$ x = 9/4
f) 0.4, 0.6 e 1.2 $\rightarrow$ x = 1.8
g) 3, 2 e 9 $\rightarrow$ x = 6
h) 4, 0.5 e 16 $\rightarrow$ x = 2
i) 2, 9 e 4 $\rightarrow$ x = 18
j) 1, 7 e 6 $\rightarrow$ x = 42
l) 6, 4 15 $\rightarrow$ x = 10
m) 12, 9 e 20 $\rightarrow$ x = 15
n) 3, 4 e 6 $\rightarrow$ x = 8

03. Sabendo-se que os números abaixo formam uma proporção contínua, determinar a terceira proporcional em cada caso:
a) 2 e 4 $\rightarrow$ x = 8
b) 0.5 e 0.2 $\rightarrow$ x = 2/25
c) 32 e 2 $\rightarrow$ x = 1/8
d) 2/3 e ¾ $\rightarrow$ x = 27/20
e) 5 e 15 $\rightarrow$ x = 45
f) 3 e 9 $\rightarrow$ x = 27
g) 4 e 16 $\rightarrow$ x = 64
h) 7 e 14 $\rightarrow$ x = 28
i) 5 e 10 $\rightarrow$ x = 20
j) 15 e 30 $\rightarrow$ x = 60
l) 10 e 20 $\rightarrow$ x = 40
m) 20 e 40 $\rightarrow$ x = 80

04. Determine a média proporcional dos números abaixo:
a) 2 e 8 $\rightarrow$ resp: 4
b) 32 e 2 $\rightarrow$ resp: 8
c) 4 e 36 $\rightarrow$ resp: 12
d) 4 e 25 $\rightarrow$ esp: 10
e) 4 e 16 $\rightarrow$ resp: 8
f) 4 e 9 $\rightarrow$ resp: 6
g) 3 e 27 $\rightarrow$ resp: 9
h) 5 e 20 $\rightarrow$ resp: 10
i) 2 e 72 $\rightarrow$ resp: 12
j) 2 e 60.5 $\rightarrow$ resp: 11

05. Determinar x e y na proporção x/y = 2/3, sabendo que x + y = 60.
resp: x = 24 e y = 36

06. A razão entre dois ângulos vale 2/3. Se o menor deles vale 30º, quanto mede o maior ângulo? resp: 45º.

07. Determine dois números sabendo que sua soma é 42 e que a razão entre eles é 3 / 4. resp: x = 18 e y = 24.

08. Determine dois números sabendo que sua diferença é 36 e que estão entre si como 5 está para 2. resp: 60 e 24

09. Dois números tem por soma 80. A razão entre eles é 5/3. Calcule os dois números. resp: 30 e 50.

10. A diferença entre dois números é 45. Calcule os dois números sabendo que estão na razão de 7 para 2. resp: 18 e 63.

11. Determine x e y na proporção $x/9 = y/12$, sabendo que $x + y = 105$.
resp: $x = 45$ e $y = 60$.

12. Resolver a proporção $x/2 = y/3$, sabendo que $x \cdot y = 96$.
resp: $x = 16$ e $y = 24$.

13. determinar x e y na propoção $x/y = 3/4$, sabendo que $x^2 + y^2 = 100$.
resp: $x = 6$ e $y = 8$

14. determinar dois números cujo produto é 48 e a razão entre eles é 3 para 4.
resp: 4 e 12.

15. A razão de dois números é ½ e a soma de seus quadrados é 20. Calcule esses números.
resp: 2 e 4.

16. A soma das idades do pai e de seu filho é de 60 anos. Sabendo que essas idades são proporcionais aos números 15 e 5, determiná-las. resp: pai → 45 anos; filho →15

17. Os comprimentos de duas peças de fazenda estão na razão 11/18. Mas o quíntuplo do comprimento do primeiro, menos o triplo do comprimento da segunda, é igual a 2 metros. Quantos metros tem cada peça? resp: 22 metros e 36 metros.

18. Em duas caixas d'água há 1.180 litros. Determine a capacidade de cada uma, sabendo que a razão entre as capacidades das caixas é 14/45.
resp: 280 e 900 (litros)

19. Determine as dimensões de um terreno retangular, sabendo que a área é de 270 m^2 e que o comprimento está para a largura como 6 para 5.
resp: comp: 18m e larg: 15m.

20. A diferença entre o comprimento de duas peças de fazenda é 15m e que estão estre si como 7 está para 4. Determine o comprimento de cada peça.
resp: 20m e 35m.

21. Desejo repartir 14kg de feijão entre duas pessoas na razão de 3 para 4. Quantos quilos vai receber cada pessoa? resp: 6kg e 8kg

22. Num terreno, a área construída supera a área livre em $400m^2$. Sabendo que a razão entre a área livre e a construída é de 3/2, qual é a área total do terreno?
NOTA: Área total = A. livre + A. construída. resp: $2.000m^2$

23. Determine x, y e z nas proporções $x/3 = y/2 = z/5$, sabendo que $x + y + z = 60$.
resp: $x = 18$, $y = 12$ e $z = 30$

24. Determine a, b e c na proporção $a/9 = b/15 = c/18$ sabendo que $a + b + c = 210$.
resp: $a = 45$, $b = 75$ e $c = 90$

25. Determine m, n e k na proporção m/20 = n/7 = k/3 sabendo-se que m - n + k = 80.
resp: m= 160, n = 56 e k = 24

26. Determine x, y e w na proporção x/5 = y/9 = w/3 sabendo-se que x + y - w = 77.
resp: x = 35, y = 63 e w = 21

27. Determine 3 números cuja soma vale 105, sabendo que o primeiro está para o segundo assim como 2 está para 5, assim como o segundo está para o terceiro como 5 está para 8. resp: 14, 35 e 56.

28. A soma de três números é igual a 1.111. Sabendo que o 1^0 está para o 2^0 como 8 está para 15, e que a soma desses dois números é 92, determinar os três números.
resp: 32, 60 e 1.019

29. A soma de três números é igual a 7.777. O 1^0 está para o 2^0 como 4 para 11, e a diferença entre esses dois números é igual a 805. Quais são os três números.
resp: 460, 1.265 e 6.052.

30. Uma peça de fazenda foi dividida em 4 partes, proporcionais aos números 5, 6, 8 e 10. Sabendo que a peça tinha 116 metros, determinar o comprimento de cada corte.
resp: 20 metros, 24 metros e 40 metros

31. Determinar as dimensões de um depósito de água cuja capacidade é de 960.000 litros, sabendo que o comprimento, a largura e a altura estão para os números 5, 3 e 1.
resp: comp: 20m, larg: 12m e alt: 4m.

32. Duas famílias combinaram passar as férias numa casa do campo, com despesas em comum, distribuídas de acordo com o número de pessoas de cada uma. A família “A” tem 5 pessoas, a família “B” tem 4 pessoas. Terminadas as férias, viu-se que a família “A” gastou R$ 8.424,00 e a “B” gastou R$ 9.342,00, razão por que tiveram de fazer um acordo de contas. Que quantia “A “ deve dar a família “B”? resp: R$ 1.446,00.

33. A diferença entre as idades de duas pessoas, é de 12 anos. A idade da mais nova está para a da mais velha assim como 4 está para 5. Determinar as idades.
resp: 48 e 60

34. Em um numeral de dois algarismos o valor absoluto do algarismo das dezenas está para o das unidades como 3 está para 4 e a soma dos valores absolutos dos mesmos é 14. Escrever esse número. resp: 68

35. Um pai de 40 anos tem o dobro das idades de seus dois filhos. Quais são as idades destes, sabendo que estão entre si como 2 está para 3 ? resp: 8 e 12.

36. A soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é igual a 90^0 . Calcular esses ângulos sabendo que estão entre si como 2 está para 3. resp: 36^0 e 54^0.

37. A soma das idades de Leonardo e Rodrigo é de 30 anos. Sabendo-se as idades de ambos estão na razão de 2 para 3, calcule a idade de Rodrigo. resp: 18 anos

38. A diferença entre as idades de um avô e uma neta é 42 anos. Calcule a idade do avô, se sua idade está para 9 assim como a idade da neta está para 2. resp: 54

39. Calcular as dimensões de um salão de forma retangular com 192m de área, sabendo que as suas dimensões estão entre si como 3 está para 4. resp: 12m e 16m

40. Num triângulo obtusângulo, o ângulo obtuso mede 135^0 e os ângulos agudos estão entre si como 8 está para 7. Calcular esses ângulos. resp: 24^0 e 21^0.

41. Dois triângulos semelhantes tem alturas, respectivamente, iguais a 2cm e 3cm. Qual a medida da base do primeiro se a do segundo mede 18cm? resp: 12 cm

42. No solo, uma haste vertical, sob a sombra do Sol, de 6m de altura projeta uma sombra de 5m. No mesmo instante, a sombra do edifício mede 20m. Qual é a altura do edifício? resp: 24m

03. M É D I A S

Às vezes se torna necessário comparar, classificar conjunto de números. E para isso utilizamos as médias. Existem vários tipos de médias. Dentre elas destacamos:
- Média Aritmética Simples;
- Médias Aritmética Pondeada;
- Média Geométrica;
- Média Harmônica.

1. MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES (Ma): A média aritmética de dois ou mais números é o quociente da divisão da soma dos números dados pela quantidade deles. é o quociente da soma dos termos pelo número de termos. Assim, podemos fazer:

Ma = soma dos números / quant. dos números

1) Exemplo: Determinar a média aritmética de 10, 12, 20 e 25.

* Resolução: Soma dos números: 10 + 12 + 20 + 25 = 67
Quantidade dos números: temos 4 números
Então fazemos : Ma = 67/4
Ma = 16.7

2) Exemplo: Calcular amédia aritmética dos números 20, 30, 40, 50 e 60.

* Resolução: Soma dos números: 20 + 30 + 40 + 50 + 60 = 200
Quantid. de números: temos 5 números
Então fazemos : Ma = 200/5
Ma = 40

2.MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA (Mp): É quando para certos valores atribuímos importâncias (pesos) diferentes. Divide-se a soma dos produtos (valores x pesos) pela soma dos pesos.

Então temos: Mp = soma dos produtos / soma dos pesos

1) Exemplo: Em um bimestre, um aluno obteve as seguintes notas:
Nota da prova: 6 e peso : 3
Nota do trabalho: 4 e peso : 2
Nota de frequência: 5 e peso: 2
Determine sua média ponderada.

* Resolução: Divide-se a soma dos produtos (notas x pesos) pela soma dos pesos.
Fazendo os produtos: 6 . 3 =**18** 4 . 2 = **8** 5 . 2 = **10**
Efetuando a soma dos produtos → 36
Soma dos pesos: 3 + 2 + 2 = 7
Então temos: Mp = 36/7
Mp = 5,14

2) Exemplo: A nota média em um colégio é 7. Sabendo que uma aluna obteve 5 no trabalho, 4 na prova e 7 na frequência, determine a sua média ponderada sendo 3, 2 e 1 os respectivos pesos para se saber se ela será ou não aprovada.

* Resolução: Fazendo os produtos: $5 . 3 = \mathbf{15}$ $4 . 2 = \mathbf{8}$ $7 . 1 = \mathbf{7}$

Soma dos produtos: 30

Soma dos pesos: $3 + 2 + 1 = 6$

Então $Mp = 30 / 6$

$Mp = 5$

Resposta: A aluna está reprovada.

4. MÉDIA HARMÔNICA (Mh) : É o inverso da Média Aritmética dos inversos dos números dados.

$$\boxed{Mh = 1/Ma}$$

1) Exemplo: Determinar a media harmônica dos números 3, 4 e 6.

* Resolução: Calculamos em primeiro a média aritmética dos inversos:

$$Ma = \frac{(1/3 + 1/4 + 1/6)}{3} = \frac{(9/12)}{3} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Como: $Mh = 1 / Ma$

$Mh = 1 / (1/4)$

$Mh = 4$

2) Exemplo: Determinar a média harmônica dos números 5, 6 e 7 .

* Resolução : Calculamos a média aritmética dos inversos dos números.

$$Ma = \frac{(1/5 + 1/6 + 1/7)}{3} = \frac{(107/210)}{3} = \frac{107}{630}$$

Como : $Mh = 1/Ma$

$Mh = 1 / (107/630)$

$Mh = 630/107$

$Mh = 5{,}9$

3) Exemplo: Determine a média harmônica dos termos: a, a/3 e 2a/3.

* Resolução: Calculamos a média aritmética dos inversos dos termos.

$$Ma = \frac{(1/a + 3/a + 3/2a)}{3} = \frac{(11/2a)}{3} = \frac{11}{6a}$$

Como: $Mh = 1/Ma$

$Mh = 1 / (11/6a)$

$Mh = 6a/11$

3. MÉDIA GEOMÉTRICA (Mg) : É a raiz enésima do produto desses números. Média geométrica de dois, três, quatro ... , números é a raiz quadrada, cúbica , quarta..., (quando existe) do produto deles. Assim temos: $Mg = (\text{produtos dos números})^{1/n}$

l) EXEMPLO: Calcule a média geométrica dos números 2 e 32.
* Resolução: Como temos dois números, extraímos a raiz quadrada do produto deles.
Então temos: Mg = $\sqrt{2x32}$ $\rightarrow$ Mg = $\sqrt{64}$ $\rightarrow$ Mg = 8
2) EXEMPLO: Determinar a média geométrica dos números 4, 16 e 27.
* Resolução: Como temos três números, extraímos a raiz cúbica do produto deles.
Então temos: Mg = $\sqrt[3]{4x16x27}$ $\rightarrow$ Mg = $\sqrt[3]{1.728}$ $\rightarrow$ Mg = 12
3. EXEMPLO: Determine a média geométrica dos números 2, 4, 4 e 8
* Resolução: Como temos quatro números, extraímos a raiz quarta do produto deles.
Então temos: Mg = $\sqrt[4]{2x4x4x8}$ $\rightarrow$ Mg = $\sqrt[4]{256}$ $\rightarrow$ Mg = 4
4. EXEMPLO: Determinar a média geométrica dos números 11, 2, 4, 8 e 16.
* Resolução: Como temos cinco números, extraímos a raiz quinta do produto deles.
Então temos: Mg = $5\sqrt{1x2x44x8x16}$ $\rightarrow$ Mg = $\sqrt[5]{1.024}$ $\rightarrow$ Mg = 4

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Determine a média aritimética dos números abaixo:
a) 20, 30 e 60 $\rightarrow$ resp: 36,6
b) 40, 50 e 70 $\rightarrow$ resp: 53,3
c) 2,5; 3,7 e 8,1 $\rightarrow$ resp: 4,7
d) 3,5; 3,3 e 3,2 $\rightarrow$ resp: 3,3
e) 8,3; 9,2 e 10,5 $\rightarrow$ resp: 9,3
f) 7,3; 6,4 e 3,3 $\rightarrow$ resp: 5,6
g) 4, 21, 13, 6 e 10 $\rightarrow$ resp: 10,8
h) 1/4, 1/3 e 1/2 $\rightarrow$ resp: 13/36
i) 1/4, 2/5, 3/2 e 12/10 $\rightarrow$ resp: 67/80
j) 3/4, 2/3, 5/6 e 2 $\rightarrow$ resp: 17/16
l) 3a, 3b e 3c $\rightarrow$ resp: a + b + c
m) (x + a) e (x - a) $\rightarrow$ resp: x
n) 2(y + b) e 2(y - b) $\rightarrow$ resp: 2y
o) (3x + b), (3x - b) e 3 $\rightarrow$ resp: x + 1
p) (2a + b) e (2a - b) $\rightarrow$ resp: 2a
q) (b + 2a) e (b - 2a) $\rightarrow$ resp: b
r) (x + 4) e (x - 2) $\rightarrow$ resp: x + 1
s) (xy + 5), (xy - 5) e xy $\rightarrow$ resp: xy
t) (4y + 2x) e (2y + 4x) $\rightarrow$ resp: 3(x + y)
u) (5b - m), (4m - b) e 3x $\rightarrow$ resp: x + b + m
v) (5abc), (-3bca), (4cab) e (-2bac) $\rightarrow$ resp: abc
x) Num bimestre, um aluno obtve as seguintes notas: 8 no trabalho, 5 na prova e 4na frequência. Qual a média do aluno nesse bimestre? resp: 5,6
z) Num bimestre, um aluno obteve três notas de valors consecutivos. Sabendo que sua média foi de pontos. Quais foram suas notas? resp: 6, 7 e 8
z.1) Um aluno obteve com suas três notas uma média 6. Como a 2º nota o dobro da 1º e a 3º nota vale tanto qanto as duas primeiras, quais foram Notas? resp: 3, 6 e 9

2. Determine a média ponderada dos números abaixo:
01) 4, 10 e 7; pesos respectivos: 2, 2 e 1 $\rightarrow$ resp: 7
02) 5, 8, 4 e 5; pesos respectivos: 2, 2, 3 e 3 $\rightarrow$ resp: 5,3
03) 8, 6, 4 e 4; pesos respectivos: 2, 2, 3 e 3 $\rightarrow$ resp: 5,2
04) 10, 20 e 50; pesos respectivos: 4, 2 e 2 $\rightarrow$ resp: 22,5
05) 7, 8, 9 e 10; pesos respetivos: 4, 3, 2 e 1 $\rightarrow$ resp: 8
06) a, b e (a - b); pesos respectivos: 2, 3 e 5 $\rightarrow$ resp: 7a/10 - b/5
07) (a - b), a e b; pesos respectivos: 4, 2 e 3 $\rightarrow$ resp: 2a/3 - b/9
08) a, a/2 e a/3; pesos respectivos: 2, 4 e 6 $\rightarrow$ resp: a/2
09) (x - y), x e y; pesos respectivos: 2, 4 e 6 $\rightarrow$ resp: x/2 + y/3
10) (x + y), y e x; pesos respectivos: 3, 2 e 1 $\rightarrow$ resp: 2x/3 + 5y/6
11) (x + y), (x - y), x; pesos respectivos: 2, 3 e 4 $\rightarrow$ resp: x - y/9

12) Um aluno obteve as seguintes notas: 7 no trabalho, 6 na apresentação e 5 na prova. Sabendo que lhe atribuíram os respectivos pesos: 2, 3 e 4, qual a média final do aluno? Resp: 5,7

13) Uma aluna obteve 9 no trabalho, 5 na prova e 3 na freqüência. Os pesos que lhe atribuíram foram respectivamente 1, 2 e 4. Qual será sua média? resp: 4,42

14) A média geral numa escola é 7. No 1^0 bimestre, um aluno obteve as seguintes notas: 8 no trabalho, 5 na apresentação e 7 na prova. Foram-lhe atribuídos os seguintes pesos: 1, 3 e 5 respectivamente. O aluno foi aprovado ou reprovado.
resp: ( ) aprovado ( ) reprovado

15) Após três exames: trabalho, apresentação e prova, um aluno conseguiu as seguintes notas: 7 no trabalho e 5 na apresentação. Sabendo que ele atingiu a média 7 cujos pesos que lhe atribuíram foram respectivamente: 4, 2 e 3; qual foi a nota de sua prova? resp: 8,3

16) Após três testes: oral, escrito e prático, uma aluna atingiu a media 7, obtendo 7 no teste oral e 5 no escrito. Qual sua nota no teste prático cujos pesos atribuídos foram respectivamente: 2, 3 e 4? resp: 8,5

17) Numa prova de recuperação, um aluno precisa de 4 pontos. A prova será analisada sob três aspectos: redação, caligrafia e pontuação. Na avaliação da prova as notas foram respectivamente 7, 5 e 4 o que os respectivos pesos atribuídos foram: 2, 3 e 4; pergunta-se: a aluna se aprova ou não se aprova?
resp: ( ) a aluna se aprova ( ) a aluna não se aprova

18) Para um exame de admissão, um aluno obteve média 8 pela compreensão do texto, caligrafia e pontuação. Cujas notas foram respectivamente: 6, 7 e x. Sabendo que lhe atribuíram os respectivos pesos: 2, 3 e 4; qual sua nota na pontuação? resp: x = 9,7

19 Numa prova de recuperação, um aluno precisa de 5 pontos. Sabendo que conseguiu 5 pontos na redação, 6 na caligrafia e 7 na pontuação, cujos pesos respectivos foram: 4, 3 e 2; pergunta-se: o aluno se aprova ou se reprova?
resp: ( ) o aluno se aprova ( ) o aluno se reprova

20) Um aluno foi aprovado com média 7. Juntando-se as notas do trabalho da apresentação e da prova que foram respectivamente: 5, 6 e x não foram suficintes. Então o professor resolveu ajudá-lo dando-lhe os respectivos pesos: 2, 3 e 4. Qual era a nota da prova (x)? resp: x = 8,7

21) Numa prova de recuperação, um aluno precisa de 6 pontos. Na sua prova, avaliou-se a redação, a caligrafia e a pontuação. Sabendo que obteve 5 pontos na redação e 4 na pontuação e que lhe foram atribuídos pesos respectivos de 2, 3 e 4; quantos pontos obteve na caligrafia sabendo-se que foi aprovado? resp: 8,0

22) Numa prova final, uma aluna precisa de 5 pontos. À sua prova será somada a nota 8 do trabalho. Para facilitar, o professor atribuiu peso 2 ao trabalho e peso 5 na prova. Qual sua nota na prova sabendo-se que foi aprovada? resp: 3,8

23) Numa prova de recuperação, um aluno precisa de 4 pontos. Será somada a nota da prova à nota 7 do trabalho. Para ajudar mais ainda, o professor atribuiu peso 3 no trabalho e pesos

5 na prova. Nestas condições, qual sua nota na prova sabendo-se que foi aprovado? resp: 2,2

3. Determine a média geométrica dos números abaixo:

1) 2 e 32 $\rightarrow$ resp: 8 **2)** 3 e 27 $\rightarrow$ resp: 9
3) 8 e 50 $\rightarrow$ resp: 20 **4)** 4, 25 e 10 $\rightarrow$ resp: 10
5) 3, 9 e 27 $\rightarrow$ resp: 9 **6)** 1/3, 2/3 e 4/3 $\rightarrow$ resp: 2/3
7) 6; 0,6 e 10 $\rightarrow$ resp: 6 **8)** 5/6, 1/4 e 3/5 $\rightarrow$ resp: ½
9) 6/9, 1/3 e 4/3 $\rightarrow$ resp: 2/3 **10)** 4a, 2a e a $\rightarrow$ resp: 2a
11) 4 e $(a - b)^2$ $\rightarrow$ resp: 2(a - b) **12)** a^3, a^2 e a $\rightarrow$ resp: a^2
13) $2(x + a)^2$ e $2(x - a)^2$ $\rightarrow$ resp: $2(x^2 - a^2)$ **14)** 4, 2x e x^2 $\rightarrow$ resp: 2x
15) $(x + a)^2$, $(x - a)^2$, $(x + a)^2$ e $(x - a)^2$ $\rightarrow$ resp: $x^2 - a^2$
16) $2a^2x$, 4x e ax $\rightarrow$ resp: 2ax **17)** $3a^2$, 3a e 3 $\rightarrow$ resp: 3a
18) $(x + 1)^2$ e $(x - 1)^2$ $\rightarrow$ resp: $x^2 - 1$ **19)** $(y - \sqrt{5})^2$ e $(y + \sqrt{5})^2$ $\rightarrow$ resp: $y^2 - 5$
20) $[(5a - 5)^2]/5$ e $[(5a + 5)^2]/5$ $\rightarrow$ resp: 5a - 5
21) $x^2(a + b)$ e $y^2(a + b)$ $\rightarrow$ resp: xy(a + b) **22)** $(\sqrt{10} + 1)/2$ e $(\sqrt{10} - 1)/2$ $\rightarrow$ resp: 3/2

4. Determine a média harmônica dos números abaixo:

1) 2, 3 e 4 $\rightarrow$ resp: 2,7 **2)** 5, 3 e 2 $\rightarrow$ resp: 2,9
3) 1/2, 1/3 e 1/4 $\rightarrow$ resp: 1/3 **4)** 1/7, 1/8 e 1/9 $\rightarrow$ resp: 1/8
5) 10/35, 10/25 e 10/45 $\rightarrow$ resp: 10/35 **6)** 3x, 2x e x $\rightarrow$ resp: 18x/11
7) 1/(a + b) e 1/(a - b) $\rightarrow$ resp: 1/a **8)** (a + b) e (a - b) $\rightarrow$ resp: $(a^2 + b^2) / a$
9) a/x e a/y $\rightarrow$ resp: 2a/(x + y) **10)** ab e 2ab $\rightarrow$ resp: (4ab)/3
11) $1/\sqrt{5}$ e $2/\sqrt{5}$ $\rightarrow$ resp:$(4\sqrt{5})/3$ **12)** 1/(a - b), 1/(b + c) e 1/(2c - a) $\rightarrow$ resp: 1/c
13) 3/7, 1/2 e 1/5 $\rightarrow$ resp: 3/14 **14)** 5/3, 2/5 e 1/2 $\rightarrow$ resp: 10/17
15) 1/a, 1/b e 1/(c - a) $\rightarrow$ resp: 3a/(b + c) **16)** $1/(\sqrt{5} + 1)$ e $1/(\sqrt{5} - 1)$ $\rightarrow$ resp: $\sqrt{5}/5$
17) $(\sqrt{6} + 2)$ e $(\sqrt{6} - 2)$ $\rightarrow$ resp: $\sqrt{6}$

04. NÚMEROS PROPORCIONAIS
DIVISÃO EM NÚMEROS PROPORCIONAIS
REGRA DE SOCIEDADE

01. **NÚMEROS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS:**

Dois ou mais números de um dado conjunto são diretamente proporcionais aos elementos de um outro conjunto quando comparamos os elementos do primeiro diretamente ao elementos do segundo. As razões entre os elementos correspondentes formam entre si uma série de razões iguais ou uma proporção múltipla.

1) EXEMPLO: Verificar se os elementos do conjunto A = (2, 5, 8) e B = (6, 15, 24) são diretamente proporcionais.
* Resolução: Sendo os elementos de A diretamente proporcionais aos elementos de B, então fazemos: A = (2, 4, 8) B = (6, 15, 24)
2/6 = 5/15 = 8/24 Observe que: 2/6 = 1/3; 5/15 = 1/3; 8/24 = 1/3.

2) EXEMPLO: Determine "x" de modo que os elementos do conjunto A = (4, 10, x) e B = (6, 15, 18) sejam diretamente proporcionais.
* Resolução: Se os elementos são diretamente proporcionais, então: A = (4, 10, x) B = (6, 15, 18) → 4/6 = 10/15 = x/18 → 4/6 = x/18 → 6x = 4 . 18 → **x = 12**

02. NÚMEROS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS:

Dois ou mais números de um dado conjunto são inversamente proporcionais aos elementos de um outro conjunto quando comparamos os primeiros inversamente aos elementos do segundo conjunto, ou seja, os primeiros elementos são diretamente proporcionais aos inversos do segundo.

1) EXEMPLO: Verificar se os elementos do conjunto A = (2, 6, 9) são inversamente proporcionais aos elementos do conjunto B = (18, 6, 4).
* Resolução: Os elementos de A são diretamente proporcionais aos inversos dos elementos de B. Então fazemos: A = (2, 6, 9) B = (18, 6, 4) 2/(1/18) = 6/(1/6) = 9/(1/4) → 2/(1/8) = 6/(1/6) → 2 . 1/6 = 6 . 1/18 → **1/3 = 1/3**
* Resposta: Pela igualdade 1/3 = 1/3, vemos que são inversamente proporcional.

2) EXEMPLO: Determinar "x" sabendo que os elementos de A = (3, x, 6) são inversamente proporcionais aos elementos de B = (10, 12, 8).
* Resolução: Os elementos de A são diretamente proporcionais aos inversos dos elemenos de B. Assim temos: A = (3, x, 6) B = (10, 12, 8) 3/(1/10) = x/(1/12) → x . 1/10=3 . 1/12 → x/10 = 3/12 → 12 . x = 3 . 10 → **x = 5/2**

03. **DIVISÃO DE UM NÚMERO EM PARTES DIRETAMENTE PROPORCIONAIS**

Dividir um número em partes diretamente proporcionais é decompô-lo em partes proporcionais aos números dados.
Para a resolução desses problemas, aplicaremos então a propriedade das proporções múltiplas.

1) EXEMPLO: Dividir 150 em partes diretamente proporcionais a 5, 8 e 12.
* Resolução: Fazendo "a", "b" e "c" os números procurados, temos que:
- A soma dos três números vale 150: $a + b + c = 150$
- Sendo a, b e c proporcionais a 5, 8 e 12, fazemos: $a/5 = b/8 = c/12$
Aplicando a propriedade das proporções múltiplas, temos:
$a/5 = b/8 = c/12 \rightarrow (a + b + c) / (5 + 8 + 12) \rightarrow$ $a/5$ ou $b/8$ ou $c/12$
$(a + b + c) / (5 + 8 + 12) = a/5 \rightarrow 150/25 = a/5 \rightarrow 25 . a = 5 . 150 \rightarrow$ **a = 30**
$(a + b + c) / (5 + 8 + 12) = b/8 \rightarrow 150/25 = b/8 \rightarrow 25 . b = 8 . 150 \rightarrow$ **b = 48**
$(a + b + c) / (5 + 8 + 12) = c/12 \rightarrow 150/25 = c/12 \rightarrow 25 . c = 12 . 150 \rightarrow$ **c = 72**

2) EXEMPLO : Dividir 84 em partes diretamente proporcionais a 4, 7 e 10.
* Resolução: Fazendo "x", "y" e "k" as partes diretamente proporcionais aos números 4, 7 e 10. Temos: $x/4 = y/7 =k/10$
A soma dos três números vale: $x + y + k = 84$
Aplicando a propriedade das proporções múltiplas, temos:
$(x + y + k) / (4 + 7 + 10) = x/4 = y/7= k/10 \rightarrow 84/21 = 4 \rightarrow x/4 = 4 \rightarrow x= 16$
$y/7 = 4 \rightarrow y= 28$
$k/10 = k = 40$
* Resposta: As partes do nº 84 proporcionais a 4, 7 e 10 são 16, 28 e 40.

04. DIVISÃO DE UM NÚMERO EM PARTES INVERSAMENTE PROPORCIONAIS:

Dividir um número em partes inversamente proporcionais é decompô-lo em partes proporcionais aos inversos dos números dados. Para a resolução desses problemas, aplicamos então a propriedade das proporções múltiplas.

1) EXEMPLO: Dividir 168em partes inversamente proporcionais a 3, 5 e 6
* Resolução: Fazendo "d", "t" e "h" os números procurados, temos:
- A soma dos números vale 168: $d + t + h = 168$
- Os números d, t e h são diretamente proporcionais aos inversos de 3, 5 e 6.
Assim : $d / (1/3) = t / (1/5) = h / (1/6)$

1) EXEMPLO: Aplicado a propriedade das proporções múltiplas, temos:
$(d + t + h) / (1/3 + 1/5 + 1/6) = 168/(21/30) = 240$
$d:1/3 = 240 \rightarrow d = 240 . 1/3 \rightarrow d = 80$
$t:1/5 = 240 \rightarrow t = 240 . 1/5 \rightarrow t = 48$
$h:1/6 = 240 \rightarrow h = 240 . 1/6 \rightarrow h = 40$
* Resposta: As partes do nº 168 inversamente proporcionais a 3, 5 e 6 são 80, 48 e 40

2) EXEMPLO: Dividir 66 em partes inversamente proporcionais a 3, 6 e 9.
* Resolução: Os números procurados são "k", "r" e "n". Logo temos: $k + r + n = 66$
$k/(1/3) = r/(1/6) = n/(1/9) \rightarrow (k + r + n) / (1/3 + 1/6 + 1/9) = 66/(11/18) = 108$
$k:1/3 = 108 \rightarrow k = 1/3 . 108 \rightarrow k = 36$
$r:1/6 = 108 \rightarrow r = 1/6 . 108 \rightarrow r = 18$
$n:1/9 = 108 \rightarrow n = 1/9 . 108 \rightarrow n = 12$
* Resposta: As partes do nº 66 inversamente proporcionais a 3, 6 e 9 são os números 36, 18 e 12.

05. REGRA DE SOCIEDADE:

Quando os problemas de divisão proporcional evolvem numa empresa, a divisão de lucros, prejuízos, gratificações, participações de lucro e bonificaçõe sem geral, eles recebem o nome de REGRA DE SOCIEDADE. Para efetuar essas divisões, são considerados capitais, tempo de serviço ou de dedicação, salários, assiduidade ou outras grandezas.
Na operação com REGRA DE SOCIEDADE, temos que considerar os seguintes casos:

1^0 - CAPITAIS E TEMPOS IGUAIS: Os sócios entram com capitais iguais e trabalham durante tempos iguais. Os lucros ou prejuízos são distribuídos m partes iguais pelos sócios.

2^0 - CAPITAIS IGUAIS E TEMPOS DIFERENTES: Os sócios entram com capitais iguais e trabalham durante tempos diferentes. Os lucros ou prejuízos são distribuídos em partes proporcionais ao tempo de trabalho.

3^0 - CAPITAIS DIFERENTES E TEMPOS IGUAIS: Os sócios entram com capitais diferentes e trabalham durante tempos iguais. Os lucros ou prejuízos são distribuídos em partes proporcionais aos capitais.

4^0 - CAPITAIS E TEMPOS DIFERENTES: Os sócios entrem com capitais e tempos diferentes. Os lucros ou prejuízos devem ser proporcionais aos capitais e aos tempos. São proporcionais ao produto dos capitais pelos tempos.
A partir daí, ressaltamos que a Regra de Sociedade pode ser SIMPLES ou COMPOSTA. A Regra de Sociedade é Simples quando temos CAPITAIS E TEMPOS IGUAIS ou CAPITAIS IGUAIS E TEMPOS DIFERENTES ou CAPITAIS DIFERENES e TEMPOS IGUAIS. A Regra de Sociedade é Composta quando temos CAPITAIS e TEMPOS DIFERENTES.

Nos exemplos seguintes, mostraremos a aplicação de cada caso da Regra de Sociedade.

1) EXEMPLO: (1^0 CASO) - Dois sócios formaram uma sociedade empregando cada o capital de R$: 800,00. Após um ano, o lucro da sociedade foi de R$: 48.000,00. Qual a parte de cada um no lucro da sociedade?
* Resolução: A parte de cada sócio é diretamente proporcional ao capital empregado, já que os tempos de serviço também são iguais. Fazendo "a" a parte do 1^0 sócio e "b" a parte de 2^0 sócio, temos: a/800 = b/800 $\rightarrow$ (a + b) / 1.600 = 48.000/1.600 = 30
a/800 = 30 $\rightarrow$ a = 30 . 800 $\rightarrow$ a = 24.000
b/800 = 30 $\rightarrow$ b = 30 . 800 $\rightarrow$ b = 24.000
* Resposta: A cada um compete igualmente R$: 24.000,00.

2) EXEMPLO: (2^0 CASO) - Três sócios formaram uma sociedade empregando cada um o capital de R$: 12.00,00.O 1^0 sócio admitiu o 2^0 após 4 meses; três meses depois da admissão do 2^0 sócio, admitiu-se o 3^0 sócio. Após um ano, a sociedade teve lucro de R$: 600.000,00. Qual a parte de cada sócio no lucro?
* Resolução: A parte de cada sócio é diretamente proporcional ao tempo de trabalho. Vemos que o tempo de cada sócio é de: 1^0 sócio: trabalhou 12 meses, 2^0 sócio : trabalhou 8 meses, 3^0 sócio: trabalhou 5 meses.

2) EXEMPLO: (2^0 CASO) - Resolução:
Fazendo "a", "b" e "c" as partes que cada deve receber, temos:
a/12 = b/8 = c/5 $\rightarrow$ (a + b + c) / (12 + 8 + 5) = 600.000/25 = 24.000

$a/12 = 24.000 \rightarrow a = 12 . 24.000 \rightarrow a = 288.000$
$b/8 = 24.000 \rightarrow b = 8 . 24.000 \rightarrow b = 192.000$
$c/5 = 24.000 \rightarrow c = 5 . 24.000 \rightarrow c = 120.000$
* Resposta: A parte de cada sócio é: 1^0 sócio - R$ 288.000,00; 2^0 sócio - R$ 192.000,00; 3^0 sócio - R$ 120.000,00

3) EXEMPLO (3^0 CASO) - Três pessoas ao formarem uma sociedade empregaram capitais de R$ 900,00; R$ 600,00 e R$ 300,00 respectivamente o 1^0, 2^0 e 3^0 sócios. Após dois anos, devidos aos negócios não correrem bem, dissolveu-se a sociedade com prejuízo de R$ 12.600,00. Qual a perda de cada sócio na dissolução da sociedade?
* Resolução: A perda de cada sócio é diretamente proporcional aos seus capitais. Fazendo k, r e n as respectivas perdas, temos:
$k/900 = r/600 = n/300 \rightarrow (k + r + n) / 1.800 = 12.600/1.800 = 7$
$k/900 = 7 \rightarrow k = 7 . 900 \rightarrow k = 6.300$
$r/600 = 7 \rightarrow r = 7 . 600 \rightarrow r = 4.200$
$n/300 = 7 \rightarrow n = 7 . 300 \rightarrow n = 2.100$
* Resposta: Vide resolução.

4) EXEMPLO (4^0 CASO) - Uma sociedade foi instituída por quatro sócios. O 1^0 entrou com capital de R$500,00 e trabalhou 8 meses; o 2^0 empregou capital de R$700,00 tendo trabalhado 6 meses; 3^0 sócio aplicou capital de R$900,00 tendo trabalhado 5 meses; o 4^0 sócio trabalhou 3 meses apenas, mas empregou capital de R$1.300,00. No final, ao ser dissolvida a sociedade, percebe-se um lucro social de R$149.400,00. Qual a parte de cada sócio no lucro da sociedade?
* Resolução: Fazendo "a", "b", "c" e "d" a parte de cada sócio, temos:
$a/4.000 = b/4.200 = c/4.500 = d/3.900 \rightarrow (a + b + c + d) / 16.600$
A parte de cada sócio é diretamente proporcional aos produtos dos capitais pelos respectivos tempos:

Assim: $8 . 500 = 4.000 \rightarrow a/ 4.000$
$6 . 700 = 4.200 \rightarrow b/4.200$
$5 . 900 = 4.500 \rightarrow c/4.500$
$3 . 1.300 = 3.900 \rightarrow d/3.900$
$a/4.000 = b/4.200 = c/4.500 = d/3.900 = (a + b + c + d) / 16.600 = 149.400/16.600 = 9$
$a/4.000 = 9 \rightarrow a = 9 . 4.000 \rightarrow a = 36.000$
$b/4.200 = 9 \rightarrow b = 9 . 4.200 \rightarrow b = 37.800$
$c/4.500 = 9 \rightarrow c = 9 . 4.500 \rightarrow c = 40.500$
$d/3.900 = 9 \rightarrow d = 9 . 3.900 \rightarrow d = 35.100$
* Resposta : A parte de cada sócio foi de: 1^0 sócio : R$ 36.000,00; 2^0 sócio : R$37.800,00; 3^0 sócio: R$40.500,00 ; 4^0 sócio: R$ 35.100,00

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Determinar "a" e "b" sabendo que os conjuntos A e B são diretamente proporcionais: A = (5, a, 20); B = (3, 6, b) resp: a = 10 b = 12

02. Determinar "f" e "g" sabendo que os conjuntos A e B são diretamente proporcionais: A = (f, 12, 15) e B = (28, g, 20) resp: f = 21 g= 16

03. Determinar “x” e “y” sabendo que os conjuntos abaixo são inversamente proporcionais:
A = (x, 2, 3)   B = (7, y, 14)   resp: x = 6   y = 21

04. Determinar “t” e “h” sabendo que os conjuntos são inversamente proporcionais:
A = (3, t, 10)   B = (5, 25, h)   resp: t = 3/5   h = 3/2

05. Dividir o número 870 em partes diretamente proporcionais aos números 7, 10 e 12.
resposta: 210, 300 e 360

06. Dividir 228 em partes diretamente proporcionais aos números 5, 6 e 8.
resposta: 60, 72 e 96

07. Dividir o número 330 em partes diretamente proporcionais aos números 2, 3,7 e 10
resposta: 30, 45, 105 e 150.

08. Dividir o número 520 em partes diretamente proporcionais aos números 4 e 1/3.
resposta: 480 e 40

09. Dividir o número 380 em partes inversamente proporcionais aos números 2, 5 e 4.
resposta: 200, 80 e 100.

10. Dividir o número 459 em partes inversamente proporcionais aos números 3, 4, 10 e 6.
resposta: 180, 135, 54 e 90.

11. Dividir o número 200 em partes inversamente proporcionais aos números 1/3 e 11/5.
resposta: 75 e 125.

12. Dividir o número 154 em partes diretamente proporcionais a 6, 7 e 9.
resposta: 42, 49 e 63.

13. Dividir o número 195 em partes inversamente proporcionais a 4, 6 e 8
resposta: 90, 60 e 45.

14. Dividir o número 1.872 em partes inversamente proporcionais a 3, 4 e 6.
resposta: 832, 624 e 416.

15. Dividir o número 160 em partes diretamente proporcionais a 2, 3 e 5
resposta: 32, 48 e 80.

16. Dividir 380 em quatro partes, de modo que a primeira esteja para a segunda como dois está para três, a segunda esteja para a terceira como quatro está para sete, e a terceira esteja para quarta como três está para cinco.   resposta: 40, 60, 105 e 175.

17. Dividir 540 em três partes, de modo que a 1^0 esteja para a 2^0 como 5 está para 8; e a 2^0 esteja para a 3^0 como 4 está para 7.   resposta: 100, 160 e 280

18. Dividir 490 em quatro partes de modo que a razão entre a 1^0 e a 2^0 seja de 2/5, a razão entre a 2^0 e a 3^0 seja 2/3 e a razão entre o 3^0 e o 4^0 seja 3/4.
resposta: 40, 100, 150 e 200.

19. Divida o número 1.230 em partes diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 5 e ao mesmo tempo aos números 3, 5 e 4, respectivamente. resp: 180, 450 e 600

20. Dividir o número 270 em partes inversamente proporcionais aos números 2, 4 e 3 e, ao mesmo tempo, aos número 3, 2 e 4, respectivamente. resp: 120, 90 e 60

21. Divida o número 36 em partes diretamente proporcionais aos números 6, 8 e 12 e, ao mesmo tempo, em partes inversamente proporcionais aos números 2, 4 e 3, respectivamente. resposta: 12, 8 e 16

22. Dividir o número 6.750 em partes inversamente proporcionais aos números 1/2, 1/3 e 1/4. resposta: 1.500, 2.250 e 3.000

23. O proprietário de uma pequena empresa de transporte resolveu distribuir R$ 6.000,00 entre seus 3 motoristas, em partes inversamente proporcionais as quantidades de multas no trânsito que tiveram durante o ano. Quanto coube a cada motorista, sabendo que dois deles foi multado 2 vezes cada um e o outro 5 vezes?
resposta: R$ 2.500,00; R$ 2.500,00 e R$ 1.000,00

24. Uma empresa distribuiu R$ 16.200,00 entre seus 3 gerentes. A divisão foi feira em partes diretamente proporcional ao tempo de serviço na empresa e, ao mesmo tempo, ao número de filhos de cada um. O 1^0 gerente tem 3 anos na firma e 4 filhos; o 2^0 tem 4 anos e 2 filhos; o 3^0 tem 5 anos e 2 filhos. Quanto recebeu cada um?
resposta: R$ 6.480,00; R$ 4.320,00 e R$ 5.400,00

25. Numa disputa hípica entre dois cavaleiros, o prêmio de R$ 280.000,00 é dividido em partes inversamente ao número de obstáculos derrubados e ao tempo gasto no percurso. Se o 1^0 cavaleiro derrubou 2 obstáculos e gastou 3 minutos no percurso e o 2^0 , 4 obstáculos e 2 minutos, quanto recebeu cada um?
resposta: R$ 160.000,00 e R$ 120.000,00

26. Três mulheres tornam-se sócias de uma loja e permanecem trabalhando nela 2, 3 e 5 horas por dia. Se o lucro total, no final de um ano, foi de R$ 200.000,00; qual é o ganho de cada uma, supondo que a divisão seja feita em partes diretamente proporcionais às horas de permanência na loja?
resposta: R$ 40.000,00; R$ 60.000,00 e R$ 100.000,00

27. Um senhor deixou uma fortuna de R$ 3.000,00 a ser repartida entre 3 filhos, proporcionalmente às suas idades, que são: 3 anos, 4 anos e 5 anos. Quanto receberá cada um? resposta: R$ 750,00; R$ 1.000,00 e R$ 1.250,00

28. Comprei duas peças de fita por certa quantia. Quanto custou cada uma, se os seus preços são diretamente proporcionais a 7 e a 9 e a 1^0 peça custou menos R$ 500,00 do que a 2^0 ?
resposta: R$ 1.750,00 e R$ 2.250,00

29. A fortuna de quatro pessoas somam R$ 33.700,00. Quanto possui cada uma, se a fortuna da 1^0 está para a da 2^0 como 3 está para 5; a da 2^0 para a 3^0 como 7 para 9; e a da 3^0 para a 4^0 como 2 para 3?
resposta: R$ 4.200,00; R$ 7.000,00; R$ 9.000,00 e R$ 13.500,00

30. Dividir 40 em 3 partes tais que as 2 primeiras sejam iguais e que a 3^0 seja 2/3 da 1^0
resposta: 15, 15 e 10.

31. Dividir 630 em três partes tais que a 1^a seja os 2/3 da 2^a e esta os 4/5 da 3^a .
resposta: 144; 216 e 270

32.Dividir 360 em três partes de modo que as duas últimas recebam, cada uma, 3/2 da parte da primeira. resp: 90, 135 e 135

33. Para condicionar 3.000 litros de detergente, um comerciante dispõe de vasilhames de 3 litros, 5 litros e 10 litros, em quantidades iguais de cada tipo. Quantos litros estão contidos no total dos vasilhames com capacidade para 5 litros? resp: 1.000 litros

34. Um vendedor de automóvel negociou três veículos recebendo ao todo R$ 155.000,00. Sabendo que seus preços foram estabelecidos na razão inversa a seus anos de fabricação; 2, 3 e 5 anos, determine o preço de cada veículo?
resp: R$ 75.000,00; R$ 50.000,00 e R$ 30.000,00

35. Um reservatório de $2{,}520m^3$ de capacidade foi completamente cheio por três torneiras que despejam por minuto 12 L, 8 L, e 16 L de água, respectivamente. Determinar o volume de água que o reservatório recebeu de cada torneira.
resp: 840 L, 560 L e 1.120 L

36. Um tio ofereceu R$ 60,00 para serem repartidos entre seus três sobrinhos, em partes inversamente proporcionais às faltas à escola que tiveram durante o mês. Quanto coube a cada sobrinho, sabendo que dois deles faltaram 2 vezes cada e o outro faltou 5 vezes? resp: R$ 25,00; R$ 25,00 e R$ 10,00

37. Dividir 132 em duas partes de sorte que uma delas seja os 4/7 da outra.
resposta: 84 e 48

38. Repartir R$ 45.600,00 entre 3 pessoas de maneira que à 1^a receba tanto quanto as duas últimas, cujas partes são proporcionais a 22 e 35.
resposta: R$ 22.800,00; R$ 8.800,00 e R$ 14.000,00

39. Dividir 143 em 3 partes, de sorte que as duas primeiras sejam iguais e que a 3^a seja os 5/6 da soma das duas primeiras. resposta: 39, 39 e 65

40. Três operários fizeram um serviço e receberam R$ 300,00. Mas o 2^0 só trabalhou a metade dos dias do 1^0, enquanto o 3^0 só fez 1/3 do trabalho do 2^0. Quanto receberá cada um? resposta: R$ 180,00; R$ 90,00 e R$ 30,00

41. Dividiu-se 2.800 em 3 partes, de maneira que a 1^a foi os 2/3 da 2^a que era os 4/5 da 3^a. Qual o valor de cada parte? resposta: 640,00; 960,00 e 1.200,00

42. Dois criadores alugaram um pasto e pagaram R$ 2.412,00. Enquanto o 1^0 pôs 112 animais durante 30 dias, o 2^0 pôs 145 animais durante 60 dias. Qual a cota de cada um? resposta: R$ 672,4 e R$ 1.740,00

43. Uma herança de R$ 101.500,00 deve ser dividida entre 3 pessoas de modo que a parte da 1^a corresponda aos 2/5 da parte da 2^a e aos ¾ da parte da 3^a. Quanto tocará a cada uma das 3 pessoas? resp: R$ 21.000,00 ; R$ 52.500,00 e R$ 28.000,00

44. Certa quantia foi dividida entre duas pessoas, em partes inversamente proporcionais a 7 e 15. Quais são as partes, se a diferença entre elas é de R$ 160,00?
resposta: R$ 300,00 e R$ 140,00

45. Dividir 300 em partes inversamente a 1/2, 1/3 e 1/4 e diretamente proporcionais a 1/2, 1/3 e 1/4. resp: x = y = z = 100

46. Comprei 4 lotes de terreno por R$ 77.000,00. Sabe-se que os comprimentos dos lotes são proporcionais a 2, 3, 4 e 5 e as larguras são proporcionais a 6, 7, 8 e 9 respectivamente. Qual o preço de cada terreno, se forem pagos proporcionalmente às suas superfícies?
resp: R$ 8.400,00; R$ 14.700,00; R$ 22.400,00 e R$ 31.500,00

47. O vidro para a fabricação de lentes obtém-se fundindo-se 4 partes de areia sílica com 4 partes de míneo e com 1 parte de soda. Calcule o material necessário para fundir uma lente de 0,72g. resp: 0,32g areia sílica; 0,32 de mínea e 0,08g de soda

48. Certa pólvora é obtida misturando-se 33 partes de nitrato de potássio, 7 de carvão e 5 de enxofre. Quantos quilogramas de cada uma dessas substâncias são necessárias para produzir 9 toneladas de pólvora?
resp: 6.600kg de nitrato; 1.400kg de carvão e 1.000kg enxofre.

49. Para construir dois muros, um de 6m de comprimento, 4m de altura, 45cm de espessura, e outro de 10m de comprimento; 4,4m de altura; e 30cm de espessura, foram empregados 12.000 tijolos. Quantos tijolos se gastaram em cada muro?
resposta: 5.400 no 1^0 e 6.600 no 2^0

50. Certo concreto obtém-se misturando-se uma parte de cimento, 3 de areia e 6 de pedra. Calcular as quantidade de cada material para produzir $185m^3$ de concreto.
resposta: $18{,}5m^3$ cimento; $55{,}5m^3$ areia e $11m^3$ pedra.

51. Certa sociedade constituída por três sócios com um capital de R$ 180.000,00, teve R$ 25.200,00 de lucro. Sabendo que o sócio A entrou com 1/3 do capital, que o sócio B entrou com 2/5 e o sócio C entrou com o restante, determinar o lucro de cada sócio.
resp: A - R$ 8.400,00; B - R$ 10.080,00 e C - R$ 6.720,00

52. A e B fundaram uma sociedade. Três meses depois admitiram outro sócio C. Sete meses depois da entrada do 3^0 sócio, aceitaram outro sócio D. Verificando que após dois anos a sociedade teve lucro de R$ 227.835,00;qual a parte de C e D na sociedade?
resposta: C - R$ 57.645,00 e D - R$ 38.430,00

53. Três sócios firmaram-se com capital de R$ 12.000,00. O 1^0 entrou com 1/3 do que a 2^0 forneceu, e o 3^0 contribuiu com R$ 6.000,00. Sabendo que a sociedade teve lucro de R$ 5.000,00, quanto tocou de lucro a cada um dos sócios?
resposta: R$ 625,00; R$ 1.875,00 e R$ 2.500,00

54. Em certa sociedade comercial, o sócio A entrou com 2/5 do capital durante 3/4 do tempo, e B entrou com o resto do capital durante 2/3 do tempo. Sabendo que houve um prejuízo de R$ 49.210,00; que parte tocará a cada um dos sócios?
resposta: R$ 21.090,00 e R$ 28.120,00

55. O lucro de uma firma foi dividido entre seus 4 sócios, da seguinte maneira: O 1^0 com 20 %, o 2^0 com 25%, o 3^0 com 45% e o 4^0 com 10% . O 2^0 recebeu R$ 120.000,00 a menos do que o 3^0 . Que parte do lucro coube ao 4^0 sócio? resp: R$ 60.000,00

56. Três pessoas fundaram uma empresa. A 1ª investiu 2/3 da 2ª e esta ¼ da 3ª . Verificando-se o prejuízo de R$ 340.000,00; quanto perdeu cada pessoa?
resp: R$ 40.000,00; R$ 60.000,00 e R$ 240.000,00

57. Dois sócios ao constituírem uma sociedade, entraram respectivamente com capitais de R$ 56.400,00 e R$ 43.500,00. Na divisão do lucro, o 1^0 recebeu mais R$ 516,00 do que o 2^0 . Quanto de lucro recebeu cada sócio?
resp: R$ 2.256,00 e R$ 1.740,00

05. REGRA DE TRÊS

1 - INTRODUÇÃO:

Grandezas são elementos variáveis que acompanham um mesmo sentido de mudança ou em sentido contrário em relação a outras.

Nos problemas em que se destacam nas Regras de Três, são exemplos de grandezas os seguintes elementos: PESO - CUSTO; DISTÂNCIA - VELOCIDADE - TEMPO; MÁQUINAS, SERVIÇOS, PRODUÇÃO, PRODUTOS, SERES, etc., que se relacionam entre si, variando na proporção direta ou inversa.

A partir desses conceitos podemos distinguir:

2 - GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS:

Duas ou mais grandezas são diretamente proporcionais quando elas variam no mesmo sentido (o sentido da variação pode ser indicado por uma seta), ou seja, aumentando-se a primeira, as outras também aumenta; ou diminuindo-se a primeira, as outras também diminuem.

Observemos então a relação entre as grandezas abaixo, notando que à medida que uma grande varia de uma linha para outra, a grandeza seguinte varia no mesmo sentido, na mesma proporção (note o sentido de variação indicada pela seta).

PESO	CUSTO
1kg	R$ 20,00
2kg	R$ 40,00
3kg	R$ 60,00

VELOCIDADE	DISTÂNCIA
1m/s	5m
2m/s	10m
3m/s	15m

Pode ainda destacar também, além das grandezas antes relacionadas (PESO - CUSTO; VELOCIDADE - DISTÂNCIA) que são também exemplos de grandezas diretamente proporcionais por lógica e/ou natureza, as grandezas relacionadas entre si: SERVIÇOS - CUSTOS; PRODUTOS - PESO; MÁQUINAS - PRODUÇÃO; etc.

3 - GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS:

Duas ou mais grandezas são inversamente proporcionais quando elas variam em sentido contrário (o sentido de variação pode ser indicado por uma seta), ou seja, aumentando-se a primeira grandeza a outra diminui ou diminuindo-se a primeira grandeza, a outra aumenta, e vice-versa.

Observemos então a relação entre as grandezas abaixo, notando que à medida que uma grandeza varia de uma linha para outra, a grandeza seguinte varia em sentido contrário, na proporção inversa (notar o sentido da variação indicada pela seta):

PESSOA	TEMPO DE SERVIÇO
5	30 dias
10	15 dias
15	10 dias

VELOCIDADE	TEMPO
30 Km/h	12h
60 Km/h	6h
90 Km/h	4h

Podemos destacar também, além das grandezas acima relacionadas, algumas grandezas inversamente proporcionais, por sua lógica e/ou natureza relacionadas entre si: TEMPO - VELOCIDADE; TEMPO - PRESTAÇÃO DE SERVIÇOS; PESSOA -TEMPO DE SERVIÇO; MÁQUINAS - TEMPO; etc.

A **Regra de Três** é a operação que nos permite, dadas duas grandezas direta ou inversamente proporcionais e variando-se o valor de uma delas, determinar a variação da outra grandeza.

A Regra de Três pode ser simples ou composta, direta ou inversa.

4 - REGRA DE TRÊS SIMPLES:

A regra de três é simples quando os problemas envolvem somente duas grandezas, que podem estar relacionados entre si direta ou inversamente. Já notificamos anteriormente que, também para se identificar se a Regra de Três Simples é Direta ou Inversa, devemos notar a lógica das grandezas envolvidas no problema.

1)Exemplo: Certa máquina produz 90 peças trabalhando 50 minutos. Quantas peças produzirá em 1h20min.?

* **Resolução:** Neste caso, temos as grandezas PRODUÇÃO e TEMPO devendo pois ser tomado na mesma unidade (minuto).

Esquema:

PRODUÇÃO		TEMPO		
90 peças	↓	50 min.	↓	(D)
x peças		80 min.		

Observe que se em 50 minutos se produz 90 peças, em 80 minutos a produção das peças consequentemente será maior.

Então temos:

$$90/x = 50/80 \Rightarrow 50.x = 90.80$$
$$50.x = 7.200$$
$$x = 7.200/50$$
$$x = 144$$

Resposta: 144 peças.

2) Exemplo: Oito máquinas iguais fabricam certo número de peças em 15 dias. Em quantos dias 12 máquinas iguais as primeiras fabricam o mesmo número de peças?

* **Resolução:**

	MÁQUINAS		TEMPO
(I) ↓	8	↑	15
	12		x

$$\rightarrow \quad 8 / 12 = x / 15$$
$$12 . x = 8 . 15$$
$$12x = 120$$
$$x = 120 / 12$$
$$\mathbf{x = 10}$$

Vemos que as grandezas MÁQUINAS e TEMPO são inversamente proporcionais. Nesse caso, colocamos as grandezas na ordem direta e resolvemos a proporção.

* Resposta: Em 10 dias.

3) Exemplo: Jonas comprou 50 livros. Se cada livro tivesse custado R$ 5,00 menos levaria 10 livros a mais. Qual o preço do livro ?

* Resolução: Chamando de "x " o preço dos livros, temos o seguinte esquema:

NÚMERO DE LIVROS	PREÇO
50	x
50 + 10	x - 5

Na relação PREÇO e QUANTIDADE de livros, notamos que as grandezas são inversamente proporcionais: quanto menor o preço do livro, mais livros Jonas pode comprar.

Resolvendo, temos:

QUANTIDADE		PREÇO	
50	$\downarrow$	x	$\uparrow$ (I)
60		x - 5	

$$
\begin{aligned}
60.(x - 5) &= 50.x \\
60x - 300 &= 50x \\
60x - 50x &= 300 \\
10x &= 300 \\
x &= 300 / 10 \\
\mathbf{x} &= \mathbf{30}
\end{aligned}
$$

* Resposta: O preço do livro é R$ 30,00 .

4) Exemplo: Uma obra foi planejada para 40 dias. No décimo dia foram demitidos 10 homens. Quantos homens trabalhavam no início da obra ?

* Resolução: Chamando-se de "x" o número de homens que trabalhavam no início da obra, temos o seguinte esquema:

TEMPO		HOMENS	
10	$\downarrow$	x	$\uparrow$ (I)
30		x - 10	

Na relação TEMPO e HOMENS, notamos que as grandezas são inversamente proporcionais. Na 1ª parte do tempo "x" homens trabalharam apenas 10 dias; daí por diante apenas (x - 10) homens trabalharam os dias restantes.

Resolvendo, temos:

$$
\begin{aligned}
30.(x - 10) &= 10.x \\
30x - 300 &= 10x \\
30x - 10x &= 300 \\
20x &= 300 \\
x &= 300 / 20 \\
\mathbf{x} &= \mathbf{15}
\end{aligned}
$$

* Resposta: Trabalhavam 15 homens no início da obra.

5 - REGRA DE TRÊS COMPOSTA :

A regra de três é composta quando os problemas envolvam mais de duas grandezas que podem estar relacionadas entre si direta ou inversamente, ou mistamente, isto é, direta e inversamente ao mesmo tempo, o que geralmente se descobre na resolução de problemas. Entretanto, para verificarmos a relação de proporcionalidade entre as grandezas, devemos notar a lógica e/ou a natureza delas entre si.

1) Exemplo: Três pedreiros constroem um muro de 20m de comprimento em 10 dias. Quantos dias levarão 5 pedreiros para construírem 30 m de um muro do mesmo tipo ?

* Resolução: Neste caso, temos as grandezas PREDREIROS, COMPRIMENTO e TEMPO.

Esquema:

PREDREIROS	COMPRIMENTO	TEMPO
↑ 3	↓ 20 m	↓ 10 dias
5	30 m	x dias

Observe que "x" é o número de dias procurado.

Relacionando as grandezas entre si, a partir daquela que contém a incógnita, veremos quais estão direta ou inversamente. Assim, fazemos:
- As grandezas PEDREIROS e TEMPO são inversamente proporcionais (as setas estão em sentido contrários);
- As grandezas COMPRIMENTO e TEMPO são diretamente proporcionais (as setas tem o mesmo sentido).

Após identificarmos o sentido de proporcionalidade entre as grandezas o problema consiste agora em colocar essas grandezas no mesmo sentido e resolver a proporção. Então fazemos:

$5/3 \ . \ 20/30 = 10/x \quad \rightarrow \quad 10/x = 5/3 \ . \ 2/3 \quad \rightarrow \quad 10/x = 10/9 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 9}$

* Resposta : Levarão 9 dias

2) Exemplo: Numa tecelagem, 12 teares produzem 600m de tecido em 5 dias de 8 horas. Quantas horas por dia deverão trabalhar 15 teares para produzirem 1.200m do mesmo tecido em 8 dias?
* Resolução: Chamando de x o número de horas por dia procurado, temos o esquema:

TEARES	COMPRIMENTO	DIAS	HORAS/DIA
↑ 12	↓ 600 m	↑ 5	↓ 8
15	1.200 m	8	x

Após identificamos o sentido de proporcionalidade entre as grandezas, o problema agora consiste em colocar essas grandezas no mesmo sentido e resolver a proporção.
Então, fazemos:

$$\frac{8}{x} = \frac{15}{12} \ . \ \frac{600}{1.200} \ . \ \frac{8}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{8}{x} = \frac{15 \ . \ 600 \ . \ 8}{12 \ . \ 1200 \ . \ 5} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 8}$$

* Resposta: 8 horas.

3) Exemplo: Em 20 dias, um viajante andando 15 horas por dia faz 1.500 Km. Quantos quilômetros vai andar em 45 dias, andando 10 horas por dia, se aumentar sua velocidade em 20% ?

* Resolução: Chamando de x a quilometragem pedida, temos o seguinte esquema:

DIAS ↓	HORAS ↓	DISTÂNCIA ↓	VELOCIDADE ↓
30	15	1.500	1
45	10	x	1,20

na relação acima, partimos da grandeza que possui a incógnita x (distância) e comparamos com as demais para se obter o sentido de proporcionalidade entre as grandezas.

Resolvendo, temos:

$$\frac{1.500}{x} = \frac{30}{45} \cdot \frac{15}{10} \cdot \frac{1}{1,2} \rightarrow \frac{1.500}{x} = \frac{\cancel{30} \cdot \cancel{15} \cdot 1}{\cancel{45} \cdot \cancel{10} \cdot 1,2}$$

$$\frac{1.500}{x} = \frac{1}{1,2}$$

$$x = 1.500 \cdot 1,2$$

$$\mathbf{x = 1.800}$$

* Resposta: Vai andar 1.800 Km .

04) Exemplo: Em 18 dias de 10 horas de trabalho, 7 operários abriram uma vala de 30m de comprimento. Trabalhando 11 horas por dia, quantos dias gastarão 15 operários para abrir outra vala, de 55 m de comprimento, se a habilidade da 1ª turma está para a da 2ª como 3 para 4, e a dificuldade dos serviços como 7 para 4 ?

* Resolução: Chamando de x os dias gastos no serviço, temos o seguinte esquema:

DIAS ↓	HORAS ↑	OPERÁRIOS ↑	COMPRIMENTO ↓	HABILIDADE ↑	DIFICULDADE ↓
18	10	7	30	3	7
x	11	15	55	4	4

Na relação acima, partimos da grandeza que possui a incógnita x e comparamos com as demais para se estabelecer o sentido de proporcionalidade entre elas.

Resolvendo, temos:

$$\frac{18}{x} = \frac{10 \cdot 7 \cdot 30 \cdot 3 \cdot 7}{11 \quad 15 \quad 55 \quad 4 \quad 4}$$

$$\frac{18}{x} = \frac{3}{1} \rightarrow 3.x = 18$$

$$x = 18 / 3$$

$$\mathbf{x = 6}$$

* Resposta: Gastarão 6 dias.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Uma torneira fornece 2 hectolitros de água em 50min. Quantos litros fornecerá em 3 h 20 min? resposta: 800 litros

02. Se 12 operários fazem 72 m de um muro em 1 dia, quantos farão 20 operários? resposta: 120 metros.

03. A comissão de um vendedor é de R$ 55,00 por dúzia de canetas. Vendendo 180 delas, quanto perceberá? resposta: R$ 825,0004.

04. No mesmo instante em que um prédio de 4,5m de altura dá uma sombra que mede 13,5m, qual será o comprimento da sombra de uma torre de 130m de altura?
Resposta: 390m

05. Um pedreiro ganhou R$ 1.200,00 por 20dias de trabalho. Quanto ganharia se tivesse trabalhado 27 dias? resposta: R$ 1.620,00

06. Comprei 14m de um tecido por R$ 228,90. Se tivesse comprado só 4m, quanto teria pago? resposta: R$ 65,40

07. O imposto pago numa escritura foi de R$ 6.400,00 numa escritura de R$ 80.000,00. Numa outra escritura de R$ 5.000,00, quanto pagarei?
resposta: R$ 400,00

08. Com 80 Kg de algodão fabricam-se 120m de certo tecido. Quantos quilos serão necessários para se fazer 500m do mesmo tecido? resposta: 333,333 kg

09. Um operário faz em 10 dias certo serviço, cujo coeficiente de dificuldade é calculado em 0,4. Quantos dias gastará para fazer outra tarefa, se o coeficiente for 0,68? resposta: 17 dias

10. Uma de 15 operários faz certa tarefa em 45 dias. Em quantos dias a mesma turma fará outro serviço, cuja dificuldade é igual a 4/5 da dificuldade do primeiro?
resposta: 36 dias

11. Uma turma de pedreiros, cuja habilidade calculada é de 5,4 faz 1.620 metros quadrados de calçamentos por mês. No mesmo período, quantos m^2 fará outra turma, cuja habilidade é de 4,75? resposta: 1.425 m^2

12. Para calçar um pátio que mede 40m de comprimento e 15m de largura usaram-se 9.600 pedras. Quantas serão necessárias para outro pátio de 30m de comprimento e 18m de largura? resposta: 8.640 pedras.

13. Quanto tempo é preciso para esvaziar-se um depósito que mede 12m de comprimento, 5m de largura e 2m de altura, se saem 20 litros de água por minuto?
resposta: 100 horas.

14. Um automóvel percorre 125 km em 2h 5min. Mantendo a mesma velocidade, que distância percorrerá em 3h 20 min?
resposta: 200 km

15. Um automóvel sai de certa cidade com destino a outra, com a velocidade de 90km/h, tendo gasto 52 min. Quanto tempo gastará no regresso, se desenvolver só 60 km/h? resposta: 1h 18min.

16. Por uma caixa de 1,5m de comprimento; 50cm de largura e 12dm de altura paguei R$ 292,50. Mas se a caixa tivesse 1,25m de comprimento; 60cm de largura e 8dm de altura, quanto teria pago ? resposta: R$ 195,00

17. Dois reservatórios, um de 45m de comprimento; 0,8m de altura e 0,8m de largura e outro de 6m de comprimento; 0,9m de largura e 1,5m de altura. Uma fonte enche o 1° em 36 horas e uma outra fonte enche o 2° em12h30min. Qual é a fonte que dá mais água por hora ?

18. Uma construção ficaria terminada com os serviços de 40 operários trabalhando 10 horas por dia. Mas se o dia de trabalho for de 8 horas, quantos operários são precisos ?
resposta: 50 operários.

19. Determinar em Km a distância entre as cidades A e B sabendo que um automóvel para percorrê-las andou 20 min a 72Km/h, e 45min a 36Km/h.
Resposta: 51 Km

20. 19 operários realizam 133m de certo serviço; 28 operários produzem quanto ?
resposta:175m

21. Um automóvel a 70Km/h percorre certa distância em 2,4 horas. A 120Km/h a mesma distância será coberta em quanto tempo?
Resposta: 1,4h = 1h24min.

22. Para fazer um serviço de dificuldade 7, foram gastos 91 dias. Em quantos dias outro serviço de dificuldade 5 será concluído ?
resposta: 65 dias.

23. Ronaldo fez um serviço em 1 mês e 5 dias. Em quantos dias, nas mesmas condições, faria 3/7 do mesmo serviço ?
resposta: 15 dias

24. O piso de um salão retangular de 8m de comprimento está recoberto com 720 tacos de madeira. Qual é o comprimento de um salão de mesma largura que se recobre com 540 tacos ? resposta: 6m

25. Uma viagem foi feita em 12 dias percorrendo-se 150Km por dia. Quantos dias seriam empregados para fazer a mesma viagem percorrendo-se 200Km por dia ?
resposta: 16 dias

26. A roda de um automóvel dá 2.750 voltas em 2min45seg. Quantas voltas dará em 5min15seg, supondo que a velocidade permaneça constante ? resposta: 5.250 voltas.

27. Um litro de água do mar contém cerca de 25g de sal. Quantos litros de água devem ser evaporados para obtermos 8Kg de sal ? resposta: 320 litros.

28. Um automobilista viajando com a velocidade média de 60Km/h gasta 2h30min para ir de uma cidade a outra. Quanto tempo gastará na volta se a velocidade média for de 45Km/h ?
resposta: 3h 20min

29. Para fazer 125g de pão são necessários 100g de farinha. Quantos quilos de farinha seriam necessários para fazer dois quilos e meio de pão ? resposta: 2Kg

30. Se 6,5Kg de café cru dão 5Kg de café torrado, que quantidade de café cru deve ser levado ao forno para se obter 8Kg de café torrado ? resposta: 10,4 Kg

31. Para transportar certo volume de areia para uma construção, foram necessários 30 caminhões de $4m^3$ cada um. Quantos caminhões de $6m^3$ seriam necessários para fazer o mesmo serviço ? resposta: 20 caminhões

32. Uma folha de alumínio de 250 cm^2 pesa 275g. Qual será o peso de uma peça quadrada de 5cm de lado recortada dessa folha ? resposta: 27,5 g

33. Com 50Kg de arame fabrica-se uma tela de 30m de comprimento por 1,20m de largura. Qual será o comprimento obtido se a largura for reduzida a 0,90m ? resposta: 40m

34. Três máquinas fazem 1.350 peças de metal em 1 horas. Quantas peças seriam feitas no mesmo tempo por 5 máquinas iguais às primeiras ? resposta: 2.250 peças

35. Quatro máquinas gastam 15 dias para fazer um certo trabalho. Em quantos dias 6 máquinas iguais às primeiras fariam o mesmo serviço ? resposta: 10 dias

36. 21 teares fazem um trabalho em certo tempo, trabalhando 5 horas por dia. Quantas horas por dia deverão trabalhar 15 teares para realizar o mesmo trabalho no mesmo tempo ?
resposta: 7 horas por dia.

37. Um automóvel com velocidade de 60Km/h leva 7,5 horas para fazer um certo percurso. Qual a velocidade que deverá desenvolver para fazer o mesmo percurso em 6h ?
resposta: 75Km/h

38. Em cada 10 voltas, um parafuso avança 4,5mm. Quantas voltas deverá dar para avançar 6,3mm ? resposta: 14 voltas

39. Uma torneira despeja 30 litros de água em cada 15 minutos. Quanto tempo levará para encher um reservatório de $1m^3$ de capacidade ? resposta: 8h20min

40. A roda de um bicicleta de 2,4m de circunferência dá 3.000 voltas em 15 min. Qual é a distância que poderá percorrer em 1 horas e 10 minutos ? resposta: 33.600m ou 33,6 Km

4l. Se uma vara de 1,5 m projeta uma sombra de 2,2m ; qual será a altura de um edifício que, no mesmo instante, projeta uma sombra de 99 metros ? resposta: 67,5 m

42. Um relógio atrasa 1min 20 seg em cada 12 horas. Depois de quanto tempo seu atraso será de 40 min ? resposta: depois de 411h 25min 12 seg

43. Para assoalhar um quarto com 13,23m^2 de área foram empregados 900 tacos de madeira. Quantos tacos iguais a esses poderiam assoalhar uma sala retangular de 6m por 4,9m ?
resposta: 2.000 tacos.

44. Um terreno retangular tem 25,75m de comprimento por 15,5 de largura. Diminuindo-se a largura de 2,5m; de quanto deverá aumentar o comprimento a fim de conservar a área ?
resposta: 4,95m

45. Um automóvel empregou 4h 30min para percorrer a distância entre duas cidades, com uma certa velocidade. De quanto deverá aumentar a velocidade para fazer o mesmo percurso em ¾ h menos ? resposta: 1,20 m/s

46. Com 100Kg de trigo pode-se fazer 85Kg de farinha. Que quantidade de farinha se obtém-se com 480Kg de trigo ? resposta: 408Kg

47. Sabe-se que 5m de uma fazenda custam R$ 6.000,00 ; quanto custarão 2,8m dessa fazenda ? resposta: R$ 3.360,00

48. A sombra de uma torre mede 4,5m e a de uma vara, colocada verticalmente e no mesmo instante, mede 0,90m. Calcular a altura da torre, sabando-se que a vara tem 2m de comprimento. resposta: 10m

49. Um parafuso avança 33mm em cada 6 voltas. Calcular o número de voltas para avançar 7,7 cm. resposta: 14 voltas

50. Uma torneira despeja em meia hora 60 dal de água. Calcule quantos litros são escoados em 8 minutos. Resposta: 160 litros.

51. Um automóvel com velocidade constante percorre 150 Km em 3 horas. Mantendo a mesma velocidade, quantas horas gastará para percorrer 600 Km ? resposta: 600Km

52. A hélice de um ventilador dá 800 voltas por minuto. Quantas voltas dará em 48 segundos ? resposta: 640 voltas.

53. Um relógio atrasa 6 min cada 24 horas. Calcular o atraso em 10 horas e 40 minutos.
resposta: 2min 40seg

54. Para equilibrar uma carga colocam-se 25 objetos, pesando 3Kg cada um. Quantos objetos seriam necessários colocar se estes fossem de 5 Kg ? resposta: 15 objetos.

55. Um livro tem 300 páginas com 25 linhas em cada uma. Para reimprimi-lo, empregando-se os mesmos caracteres, quantas páginas de 30 linhas são necessárias ? resposta: 250

56. Um grupo de 18 escoteiros está acampado. A ração de pão que recebe cada um é de 0,5Kg por dia. Chegando inesperadamente mais 12 escoteiros, a quanto deverá ser reduzida essa ração para continuarem acampados o mesmo número de dias ?
resposta: 0,3

06. P O R C E N T A G E M

01) CONCEITO:

As frações que se apresentam com denominadores iguais a 100 são chamados também de razões centesimais e podem ser representadas pelo símbolo: **%**

Por exemplo, as razões 2/100 : 8/100 : 20/100 e 75/100 podem ser representadas por 2% , 8% , 20% e 75% respectivamente.

Observe então que a expressão "por cento" indicada pelo símbolo **%** , significa centésimos. Assim, 20% é simplesmente uma outra maneira de expressar 20 centésimos, ou 20/100 ou 0,20 ou 1/5 , etc. A partir dessas considerações, podemos escrever as seguintes igualdades:

a) 8% = 8/100 = 0,08 = 4/50 = 2/5 = ...
b) 50% = 50/100 = 0,50 = ½ = ...
c) 2 = 2/1 = 200/100 = 200%

Portanto, uma frase do tipo João gasta 1/4 de seu salário com o aluguel, pode ser expressa do seguintes modo, utilizando-se porcentagem: João gasta 25% de seu salário com o aluguel.

Os problemas que envolvem porcentagem são , em geral, resolvidos utilizando-se os conhecimentos sobre frações, razões e regra de três.

01) Exemplo: Uma loja está oferecendo 15% de desconto para pagamento à vista na compra de um automóvel que custa R$ 80.000,00. Quanto uma pessoa irá pagar por esse carro à vista ?
Resolução: Podemos resolver o problema pelos seguintes modos:

1° Modo:
Usando frações: 15% de 80.000 é a mesma coisa que 15/100 de 80.000 ou ainda 0,15 de 80.000,00 . Para resolvermos esse cálculo, basta efetuarmos a multiplicação da fração pelo número.

Assim: 15% de 80.000 = 15/100 x 80.000 = 0,15 x 80.000 = 12.000,00
Portanto, o preço do carro à vista será: 80.000 - 12.000 = **68.000,00**

2° Modo: Usando regra de três:

Preço	**Porcentagem**
80.000,00	100
x	15

$$80.000/x = 100/15 \longrightarrow 100.x = 15 . 80.000$$
$$x = 1.200.000/100$$
$$x = 12.000,00$$

Logo, o preço do carro à vista será: 80.000 - 12.000 = **68.000,00**

Resposta: A pessoa pagará R$ 68.000,00 à vista.

02) Exemplo: Efetuando pagamento do imposto predial após o vencimento, uma empresa pagou R$ 30.000,00 de multa. Como o imposto devido era de R$ 120.000,00, qual foi a taxa de multa ?

Resolução: Utilizando regra de três, temos:

Preço	**Porcentagem**
120.000,00	100
x	30.000

$120.000 \cdot x = 30.000 \cdot 100 \longrightarrow x = 3.000.000 / 120.000$

$x = 25$

Resposta: A taxa foi de 25 % .

2) PORCENTAGEM DE UM MESMO NÚMERO - PROPRIEDADE:

No estudo e na utilização da porcentagem, um detalhe é fundamental: toda porcentagem se refere a algum número, isto é, quando falamos em um atraso de um pagamento que acarreta multa de 20 %, fica subentendido que os 20 % são calculados sobre o valor devido.

Uma porcentagem que não se refira a outro número é apenas uma outra maneira de escrever um número. Por exemplo, 5 % é uma outra maneira de escrever o número 0,05 (cinco centésimos). Já 5 % de 1.000 corresponde a 50.

Feita essa distinção, podemos escrever a seguinte propriedade :

> Dadas diversas porcentagens, elas só podem ser adicionadas quando se referem a um mesmo número. Além disso, se um todo é dividido em partes, as porcentagens correspondentes, adicionadas, dão um total de 100 %.

*** Exemplo:** Um número foi dividido em três partes : a 1ª é a metade N e a 2ª é igual a 1/5 de N. Achar a fração correspondente à terceira parte e as porcentagens de cada parte.

Resolução : 1ª Parte : ½ de N = 50/100 de N = 50 % de N
2ª Parte : 1/5 de N = 20/100 de N = 20 % de N
3ª parte : i % de N = ?

Como as três partes procuradas formam o número N, somando-as teremos os 100% de N. Assim:

$$50\% + 20\% + \mathbf{i\% = 100\%}$$
$$70\% + \mathbf{i\%} = 100\%$$
$$\mathbf{i\%} = 100\% - 70\%$$
$$\mathbf{i\%} = 30\%$$

Então vemos que a 3° parte é 30% de N.

Por outro lado, 30% = 30/100 = 3/10 que é a fração correspondente a 3° parte

Resposta: A fração correspondente a 3° parte é 3/10.

3) **VARIAÇÃO PERCENTUAL**

Obter índices ou coeficientes a partir de uma porcentagem, ou vice-versa, constitui uma importante aplicação da porcentagem. Para os aumentos de aluguel, salários e prestações da casa própria, mensalidade escolar, etc. costumam ser divulgados "índices" ou "porcentagens". É importante que, sendo conhecido um, achemos o outro e vice-versa.

01) Exemplo: O aluguel de um apartamento passou de R$ 4.500,00 para R$ 7.515,00.
Achar: a) a porcentagem de aumento:
b) o índice (coeficiente ou fator) de atualização de aluguel na época.

a) Resolução: O aumento do aluguel foi de 7.515 - 4.500 = 3.015
A porcentagem de aumento se refere sempre ao valor anterior:

Porcentagem	**Dinheiro**
100	4.500
x	3.015

$\longrightarrow$

$4.500 \cdot x = 100 \cdot 3.015$
$4.500x = 301.500$
$x = 301.500 / 4.500$
$x = 67$ ou **67%**

b) Resolução: O índice de atualização do aluguel é um número que multiplicado pelo valor antigo, dá como produto o novo valor.

4.500 $\rightarrow$ valor antigo
i_A $\rightarrow$ índice de atualização
7.515 $\rightarrow$ novo valor

$\longrightarrow$

$4.500 \cdot i_A = 7.515$
$i_A = 7.515 / 4.500$
$i_A = 1,67$

Respostas: **a) 67%** **b) 1,67**

02) Exemplo: Numa escola particular o aumento das mensalidades de uma série para outra utiliza a mesma taxa de variação. Um aluno que paga R$ 120,00 na 5ª série para a 6ª série e pagará nas mensalidades R$ 144,00 . Determine:
a) o fator de aumento das mensalidades.
b) a taxa de aumento.
c) o valor das mensalidades quando o aluno estiver na 8ª série.

* Resolução:

a) O fator de aumento é o número que multiplicando-se a mensalidade anterior obtém-se a mensalidade seguinte. Assim, temos:
mensalidade anterior $\rightarrow$ R$ 120,00
fator de atualização $\rightarrow$ i_a
mensalidade posterior $\rightarrow$ R$ 144,00

$120,00 \cdot i_a = 144,00$
$i_a = 144 / 120$
$\mathbf{i_a = 1,20}$

b) A taxa de aumento está embutida no próprio fator de aumento, pois se a mensalidade passa de 1 para 1,20 ; a diferença 1,20 - 1 = 0,20 representa o aumento ou a taxa de aumento. Logo, a taxa de aumento é 0,20 ou **20%** .

c) Para calcular o valor das mensalidades quando o aluno estiver na 8ª série, basta multiplicar as mensalidades das séries anteriores pelo fator 1,20 até atingir o valor na 8ª série. Assim fazemos:
* mensalidade na 6a série $\rightarrow$ R$ 144,00
* mensalidade na 7a série $\rightarrow$ 1,20 x 144,00 = R$ 172,80
* mensalidade na 8a série $\rightarrow$ 1,20 x 172,80 = **R$ 207,36**

* Resp.: Vide resolução.

04) OPERAÇÕES COM MERCADORIAS:

Um problema que ocorre com muita frequência no comércio e na contabilidade é aquela relacionado com as operações de compra e venda de mercadorias, onde as porcentagens de lucros ou prejuízos são calculados em relação ao preço de custo ou ao preço de venda.

Faremos então a seguir a resolução desses problemas através de Regra de Três.

01) Exemplo: O custo de um objeto foi de R$ 20.000,00. Por quanto deve ser vendido esse objeto para que se obtenha um lucro equivalente a 40% sobre o custo ? Que porcentagem representa o lucro, quando relacionado com o preço de venda ?

Resolução: Através da seguinte regra de três, temos:

Custo	**Venda**
20.000	x
100	140

$$100 \,.\, x = 140 \,.\, 20.000$$
$$100x = 2.800.000$$
$$x = 2.800.000/100$$
$$\mathbf{x = 28.000{,}00}$$

Preço de venda

Observe que o lucro foi de: 28.000 - 20.000 = **8.000,00**

Fazendo **y** a porcentagem de lucro sobre a venda, temos:

$$28.000 \,.\, y = 100 \,.\, 8.000$$
$$28.000y = 800.000$$
$$y = 800.000 / 28.000$$
$$y = 28{,}57 \text{ ou } \mathbf{28{,}57\%}$$

Respostas: O preço de venda é: R$ 28.000,00 e a porcentagem de lucro é: 28,57%

02) Exemplo: Uma pessoa comprou um objeto por R$ 7.000,00. Por quanto deve vendê-lo se:

a) deseja obter um lucro de 30% sobre o preço de compra.

b) deseja obter um lucro de 30% sobre o preço de venda.

a) Resolução: Fazendo a seguinte regra de três, teremos:

Compra	**Venda**
7.000	x
100	130

$$100 \,.\, x = 7.000 \,.\, 130$$
$$100.x = 910.000$$
$$x = 910.000/100$$
$$\mathbf{x = 9.100}$$

b) Resolução: Fazendo a seguinte regra de três, teremos:

c)

Compra	**Venda**
7.000	x
70	100

$$70 \,.\, x = 7.000 \,.\, 100$$
$$70.x = 700.000$$
$$x = 700.000/70$$
$$\mathbf{x = 10.000}$$

Respostas: a) Deve vendê-lo por R$ 9.100,00

b) Deve vendê-lo por R$ 10.000,00

03) Exemplo: Uma pessoa vende sua TV por R$ 500,00 . Por quanto comprou a TV, se:
a) obteve um prejuízo de 20% sobre o preço de venda ?
b) obteve um prejuízo de 30% sobre o preço de compra ?

* Resolução:

a) Fazendo a seguinte regra de três, temos:

Compra	**Venda**
x	500
120	100

$$100 \cdot x = 120 \cdot 500$$
$$100x = 60.000$$
$$x = 60.000 / 100$$
$$\mathbf{x = 600}$$

b) Fazendo a seguinte regra de três, temos:

Compra	**Venda**
x	500
100	70

$$70 \cdot x = 500 \cdot 100$$
$$70x = 50.000$$
$$x = 50.000 / 70$$
$$\mathbf{x = 714{,}29}$$

* Repostas: a) comprou por R$ 600,00
b) comprou por R$ 714,29

04) Exemplo: Uma máquina de escrever foi vendida com 25% de lucro sobre o custo. Se o comerciante ganhou R$ 500,00 , por quanto foi vendida a máquina ? Por quanto foi comprada a máquina ?

* Resolução: Fazendo a seguinte regra de três, temos:

Compra	**Venda**
x	x + 500
100	125

$$125 \cdot x = 100.(x + 500)$$
$$125x = 100x + 50.000$$
$$125x - 100x = 50.000$$
$$25x = 50.000$$
$$x = 50.000 / 25$$
$$\mathbf{x = 2.000}$$

Preço da compra

*** Obs:** Note que a venda é igual a compra + lucro, ou seja:
Venda = Compra + Lucro
Venda = x + 500
Venda = 2000 + 500
Venda = 2.500

* Resposta: A máquina foi comprada por R$ 2.000,00 e vendida por R$ 2.500,00 .

05) PORCENTAGEM DE PORCENTAGEM:

Um detalhe importante é aquele em que uma porcentagem se refere a um número que já está relacionado com outra porcentagem. Neste caso, essas porcentagens não podem ser adicionadas; devemos, em primeiro, aplicar uma porcentagem e, sobre o resultado obtido, aplicar a outra.

*** Exemplo:** Uma classe escolar é composta de 50 alunos, entre moças e rapazes. As moças totalizam 60% dos alunos da classe. A uma excursão, compareceram 75% dos rapazes e 50% das moças. Determinar:

a) Quantos alunos foram à excursão ?
b) A porcentagem de moças que foram à excursão em relação ao total de alunos.

a) Resolução: Fazendo M o número de moças, temos:

$M = 60\%$ de 50
$M = 0,60 \times 50$
$M = 30$

O número de rapazes é: $R = 50 - 30$
$R = 20$

→ O número de moças que foram à excursão é: $E_m = 50\%$ de 30
$E_m = 0,50 \cdot 30$
$E_m = 15$

→ O número de rapazes que foram à excursão é: $E_r = 75\%$ de 20
$E_r = 0,75 \cdot 20$
$E_r = 15$

→ Logo, foram à excursão 30 alunos (15 moças + 15 rapazes).

b) A porcentagem de moças que foram à excursão em relação ao total de alunos da classe é dada por:

Moças	**Total de alunos**
15	50
x	100

$50 \cdot x = 15 \cdot 100$
$50.x = 1.500$
$x = 1.500 / 50$
$x = 30$ ou **30%**

Respostas: a) 30 alunos foram à excursão.
b) O percentual de moças que foram à excursão em relação ao total de alunos é de 30%

06) ACRÉSCIMOS SUCESSIVOS:

Uma importante aplicação em porcentagem é aquela na qual efetuamos acréscimos sucessivos a um mesmo número. O problema básico é o seguinte: são dadas duas ou mais porcentagens que representam acréscimos a um mesmo número. Para resolvermos esse problema, procedemos da seguinte forma:

* efetuamos um primeiro acréscimo ao número;
* efetuamos um segundo acréscimo ao resultado obtido, e assim por diante.

* **Exemplo:** Num certo ano, uma empresa automobilística produziu um total de 20.000 unidades. Nos dois anos seguintes a produção aumentou de 10% e 15%, respectivamente. Pergunta-se:
a) Qual a produção anual após esses dois aumentos ?
b) Qual a porcentagem total de aumento nesses dois anos ?

a) Resolução:

A produção ao fim do 1° ano foi de: $A_1 = 10\%$ de 20.000
$A_1 = 0{,}10 \times 20.000$
$A_1 = 2.000$

→ Logo, a produção no fim do 1° ano foi: 20.000 + 2.000 = 22.000

A produção ao fim do 2° ano foi de: $A_2 = 15\%$ de 22.000
$A_2 = 0{,}15 \times 22.000$
$A_2 = 3.300$

→ Logo, a produção no fim do 2° ano foi de: 22.000 + 3.300 = **25.300**

b) Resolução:

O aumento na produção nesses dois anos foi de: 25.300 - 20.000 = **5.300**

A porcentagem total de aumento é dada com relação ao valor anterior de 20.000 unidades; por isso, temos:

Unidades	**Aumento**
20.000	5.300
100	x

$$20.000 \cdot x = 5.300 \cdot 100$$
$$20.000x = 530.000$$
$$x = 530.000 / 20.000$$
$$x = 26{,}50 \text{ ou } 26{,}50\%$$

* Respostas:

a) A produção anual passou para 25.300 unidades
b) A porcentagem total de aumento foi de 26,50%

07) DESCONTOS SUCESSIVOS:

De maneira análoga aos acréscimos sucessivos, há casos em que devemos efetuar descontos sucessivos a um mesmo número. O problema básico é o seguinte: são dadas duas ou mais porcentagens que representam descontos sucessivos a um mesmo número. Para resolvermos esse problema, procedemos da seguinte forma:

* efetuamos um primeiro desconto:
* efetuamos um segundo desconto sobre o resultado obtido, e assim por diante.

* **Exemplo:** Uma indústria, numa época de recessão, demite em um mês 10% de seus empregados que totalizavam 20.000 . No mês seguinte, há nova demissão correspondente a 5% dos empregados restantes. Pergunta-se:

a) Qual o número de empregados dessa indústria após esses dois meses ?
b) Qual a porcentagem total de demissão após esses dois meses ?

a) Resolução: Fazendo E_1 o número de empregados demitidos no 1° mês, temos:

E_1 = 10% de 20.000
E_1 = 0,10 x 20.000
E_1 = 2.000

Logo, os empregados que restaram ao fim do 1° mês foram: 20.000 - 2.000 = 18.000

Fazendo E_2 = o número de empregados demitidos no 2° mês, temos:

E_2 = 5% de 18.000
E_2 = 0,05 x 18.000
E_2 = 900

Logo, os empregados que restaram ao fim do 2° mês foram: 18.000 - 900 = **17.100**

b) Resolução: A demissão total nesses dois meses foi de: 20.000 - 17.100 = **2.900**

A porcentagem de demissão é dada com relação ao valor anterior de 20.000 empregados. Assim temos:

Empregados	**Demissão**
20.000	2.900
100	x

20.000 . x = 100 . 2.900
20.000.x = 290.000
x = 290.000 / 20.000
x = 14,50 ou **14,50%**

Respostas:

a) O número de empregados é 17.100
b) A porcentagem é 14,50%

08) DESCONTO “POR FORA” ou DESCONTO COMERCIAL SIMPLES:

Quando uma pessoa física ou jurídica toma uma quantia emprestada, assume uma dívida que deverá ser paga no futuro. Para que esse compromisso seja firmado, o credor recebe um documento, chamado “título” , com o qual pode provar publicamente que é a pessoa que deve receber aquela quantia em determinada data. Os títulos mais usados em empréstimos são a Nota Promissória e a Duplicata.

Ao pagarmos uma dívida antes do vencimento, podemos obter um abatimento, que recebe o nome de **descontos** (não confundir com desconto de liquidação). Um título de crédito tem um **valor nominal**, também chamado de “valor de face” ou “valor futuro” que é o valor do título na data de vencimento. O valor desse título antes do vencimento é chamado de **valor atual** ou **valor presente.**

Desconto Comercial Simples - ou desconto “por fora” - é o valor que se obtém pela aplicação da taxa de desconto no valor nominal, levando-se em consideração o prazo.

Assim sendo, temos:

N - valor nominal de um título;
A - valor atual desse título;
n - número de períodos antes do vencimento;
i - a taxa de desconto por período;
d - o desconto comercial simples.

Como em 1 período o desconto comercial simples é dado por **N . i,** em n períodos será dado por:

Período	**Desconto**
1	N . i
n	d

$$\boxed{\mathbf{d = N \cdot i \cdot n}}$$

O valor atual é a diferença entre o valor nominal e o desconto comercial simples, isto é:

$$\boxed{\mathbf{A = N - d}}$$

Na igualdade acima, substituindo “d” por N . i . n, obtemos:

$$\boxed{\mathbf{A = N \cdot (1 - i \cdot n)}}$$

01) Exemplo: Qual será o desconto de um título de R$ 80.000,00 se for pago hoje com a taxa de desconto de 15% a m , 4 meses antes da data de pagamento ?

Resolução: Tomando-se os dados do problema e aplicando-se na fórmula, temos:

N = 80.000
i = 15% a m
n = 4 meses
d = ?

$$\boxed{\mathbf{d = N \cdot i \cdot n}}$$

d = N . i . n
d = 80.000 x 0,15 x 4
d = 48.000

Resposta: O desconto será de R$ 48.000,00

02) Exemplo: Qual o valor a ser pago hoje por um título de R$ 50.000,00 cujo vencimento ocorrerá daqui a 3 meses, supondo a taxa de desconto comercial simples seja de 5,5% a m ?

Resolução: N = 50.000
i = 5,5% = 0,055 a m
n = 3 meses
d = ?
A = ?

Utilizando-se a fórmula, $\boxed{\mathbf{A = N \cdot (1 - n \cdot i)}}$

A = N.(1 - n . i)
A = 50.000.(1 - 3 . 0,055)
A = 50.000 - 50.000 . 3 . 0,055
A = 41.750

Resposta: O valor atual (ou presente) do título é de R$ 41.750,00

03) Exemplo: O valor atual de uma Duplicata é de R$ 60.000,00. Quanto pagarei pelo título se pedir mais um prazo de 5 meses com taxa de desconto de 10% ao mês ?

Resolução: Tomando-se os dados do problema e aplicando-se na fórmula, temos:

A = 60.000
i = 10% = 0,10 ao mês
n = 5 meses
N = ?

A = N . (1 - i . n)
60.000 = N .(1 - 0,10 . 5)
60.000 = N . (1 - 0,50)
60.000 = N . (0,50)
N = 60.000 / 0,50
N = 120.000

Resposta: Pagará pelo título R$ 120.000,00

9) **DESCONTO "POR DENTRO" ou DESCONTO RACIONAL:**

No valor nominal, estão incluídos o capital e o desconto que apresenta os juros.

Assim, se o nominal (100 + i . t) em 1(um) ano dá um desconto **i** (taxa); o nominal **N** no tempo **t** dará o desconto DD, que chamaremos de **desconto "por dentro"** ou **desconto racional.** Então temos:

Nominal	**Desconto**
(100 + i.t)	i
N. t	DD

$$DD \cdot (100 + i.t) = N \cdot t \cdot i$$

$$DD = \frac{N \cdot i \cdot t}{100 + i.t}$$

Como o desconto por dentro é o juro do capital A (valor atual), teremos:

$$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100} \quad \text{ou então} \quad DD = \frac{A \cdot i \cdot t}{100} \quad ; \quad \text{pois } j = DD \text{ e } C = A$$

Donde usaremos: $\boxed{\mathbf{DD = \frac{N \cdot i \cdot t}{100 + i.t}}}$ ou $\boxed{\mathbf{DD = \frac{A \cdot i \cdot t}{100}}}$

1) **Exemplo:** Qual é o desconto por dentro de um título de R$ 19.200,00 a 6% a a, vencível em 1 (um) ano, 1 (um) mês e 10 dias ?

Resolução: Aplicando-se a fórmula:, temos:

N = 19.200
i = 6% a a
t = 1 ano 1 mês 10 dias = 400 dias

$$DD = \frac{N \cdot i \cdot t}{100 + i.t} \rightarrow DD = \frac{N \cdot i \cdot t}{36.000 + i.t} \rightarrow DD = \frac{19.200 \times 6 \times 400}{36.000 + (6 \times 400)}$$

$$\rightarrow DD = 46.080.00 / 38.400$$

$$\rightarrow DD = 1.200$$

Resposta: O desconto é de R$ 1.200,00

2) **Exemplo:** Qual é o valor de um título que descontado por dentro a 6% a a, oito meses antes do vencimento, produziu um desconto de R$ 320,00 ?

Resolução: Aplicando os dados na fórmula, temos: DD = 320,00
i = 6% a a
t = 8 meses
N = ?

$$DD = \frac{N \cdot i \cdot t}{1.200 + i.t} \rightarrow N = \frac{DD.(1.200 + i.t)}{i \cdot t} = \frac{320.(1.200 + 6 \times 8)}{6 \times 8} = 8.320,00$$

Resposta: O valor do título é de R$ 8.320,00

10) TAXA DE JUROS SIMPLES e TAXA DE DESCONTO SIMPLES:

Taxa de juros simples (i_j) é aquela que incide sobre o capital inicial (C) , conduzindo, portanto, ao cálculo de juros simples.

Taxa de desconto simples (i_d) é aquela que incide sobre o valor de face (A) , conduzindo, portanto, ao cálculo de desconto comercial simples.

Consideremos um capital C que, investido a juros simples, a uma taxa de juros i_j , num prazo de n períodos, dará um montante M.

Consideremos, também, um título de valor atual A que, quando atualizado pela taxa de desconto simples i_d , num prazo de n períodos, dará o valor futuro N.

Dizemos que a taxa de juros simples (i_j) e a taxa de desconto comercial simples (i_d) são equivalentes se, e somente se, tomando-se o valor atual como capital o montante obtido seja igual ao valor nominal, ou seja, A = C e M = N.

Assim:

$A = N - N \cdot i_d \cdot n \rightarrow C = N \cdot (1 - i_d \cdot n) \rightarrow C / N = 1 - i_d \cdot n \quad (\text{I})$

$M = C + C \cdot i_j \cdot n \rightarrow N = C \cdot (1 + i_j \cdot n) \rightarrow N / C = 1 + i_j \cdot n \quad (\text{II})$

Das duas conclusões acima, temos: C / N = inverso de N / C

$$(\text{I})\ 1 - i_d \cdot n = \frac{1}{1 + i_j \cdot n} \rightarrow i_d = \frac{i_j}{1 + i_j \cdot n} \quad (\text{I})$$

$$(\text{II})\ 1 + i_j \cdot n = \frac{1}{1 - i_d \cdot n} \rightarrow i_j = \frac{i_d}{1 - i_d \cdot n} \quad (\text{II})$$

Nota: Dada qualquer uma das taxas, para calcularmos a outra, poderemos utilizar qualquer uma das expressões (I) ou (II). Assim, dada uma taxa de juros simples (i_j) podemos calcular a taxa de desconto comercial (i_d) usando qualquer uma das duas expressões acima relacionadas.

Então, utilize:

$$\boxed{i_d = \frac{i_j}{1 + i_j \cdot n}} \quad \text{ou} \quad \boxed{i_j = \frac{i_d}{1 - i_d \cdot n}}$$

01) Exemplo: Um capital foi aplicado a juros simples de 12,5% a m, durante dois meses. Determine a taxa de desconto comercial simples.

Resolução: $i_j = 12{,}5\% = 0{,}125$ e n = 2 meses

Utilizando a expressão (I), temos:

$$i_d = \frac{i_j}{1 + i_j \cdot n} = \frac{0{,}125}{1 + 0{,}125 \times 2} = 0{,}125 / 1{,}25 = 0{,}10 \text{ ou } 10\%$$

Resposta: $I_d = 10\%$.

02) Exemplo: Um capital de R$ 90.000,00 foi aplicado em 3 meses para pagar uma dívida, rendendo juros de R$ 8.100,00. Qual a taxa de desconto comercial simples equivalente ?

* Resolução: Tomando-se os dados do problema, temos: $C = 90.000$
$n = 3$ meses
$j = 8.100$
$i_j = ?$
$i_d = ?$

Calculemos primeiro a taxa de juros simples:

$$j = \frac{C \cdot i \cdot n}{1.200} \rightarrow 8.100 = \frac{90.000 \times i_j \times 3}{1.200} \rightarrow i_j = \frac{8.100 \times 1.200}{90.000 \times 3} = 36\% = 0,36$$

Podemos agora calcular a taxa de desconto comercial equivalente pela expressão:

$$i_d = \frac{i_j}{1 + i_j \cdot n} \rightarrow id = \frac{0,36}{1 + 0,36 \cdot 3} = 0,36 / 2,08 = 0,17 \text{ ou } 17\%$$

* Resposta: A taxa de desconto comercial equivalente é 17% .

03) Exemplo: Tenho que pagar uma Nota Promissória no valor de R$ 70.000,00. Ocorrendo juros de 15% a.m., qual o desconto que obtenho se resgatado 6 meses antes do vencimento ?

* Resolução: Note que a taxa de 15% é taxa de juros simples. Devemos encontrar a taxa de desconto comercial equivalente para calcularmos o desconto, dado pela expressão: $d = N \cdot i \cdot n$

Calculando a taxa de desconto comercial, temos: $i_j = 15\% = 0,15$

$$i_d = \frac{i_j}{1 + i_j \cdot n} \rightarrow id = \frac{0,15}{1 + 0,15 \cdot 6} = 0,15 / 1,90 = 0,07 \text{ ou } 7\%$$

Aplicando os dados na fórmula $d = N \cdot i \cdot n$, teremos o valor do desconto.

$d = N \cdot i \cdot n$
$d = 70.000 \times 0,07 \times 6$
$d = 29.400,00$

* Resposta: O desconto será de R$ 29.400,00 .

11) SUBSTITUIÇÃO DE UM TÍTULO:

Nas operações de empréstimos a curto prazo é comum o devedor não poder pagar sua dívida na data combinada. Neste caso, costuma-se fazer outro título, com um novo prazo, a fim de dar condições para que o devedor salde a dívida.

A condição de substituição, para o credor, é que a uma taxa de desconto comercial simples, por este determinada, o valor atual do novo título seja igual ao valor da dívida, ou seja, igual ao valor atual do primeiro título.

01) Exemplo: Um cliente propõe a um banco, onde fez um empréstimo, a substituição de uma Nota Promissória de R$ 600.000,00 que deveria ser paga hoje, por outra com vencimento dentro de 90 dias. O banco está utilizando, para essas operações, uma taxa de desconto comercial simples de 8,75% a m. Nessas condições, qual o valor de face (ou valor futuro) do novo título ?

* Resolução: Tomando-se os dados do problema, temos:

$A = 600.000,00 \rightarrow$ valor atual ou presente.
$n = 90$ dias $= 3$ meses $\rightarrow$ prazo de vencimento.
$I_d = 8,75\% = 0,0875 \rightarrow$ taxa de desconto comercial simples.
$N = ? \rightarrow$ valor de face, valor nominal ou valor futuro.

Aplicando na fórmula, temos:

$$A = N \,.\, (1 - i_d \,.\, n) \rightarrow \; 600.000 = N \,.\, (1 - 0,0875 \,.\, 3)$$
$$600.000 = N \,.\, (0,7375)$$
$$N = 600.000 / 0,7375$$
$$N = 813.559,32$$

* Resposta: O valor de face ou nominal do novo título será de R$ 813.559,32

02) Exemplo: Venci uma Duplicata que devia ser paga hoje por R$ 85.000,00. Querendo quitar o débito, pedi um prazo de 120 dias assumindo a nova conta. Se a taxa de desconto comercial utilizada é de 7,5% a m; quanto pagarei no final do prazo ?

* Resolução: Tomando-se os dados do problema, temos: $A = 85.000,00$
$i_d = 7,5\% = 0,075$
$n = 120$ dias $= 4$ meses
$N = ?$

Aplicando na fórmula, temos:

$$A = N \,.\, (1 - i_d \,.\, n) \rightarrow \; 85.000 = N \,.\, (1 - 0,075 \,.\, 4)$$
$$85.000 = N \,.\, (0,70)$$
$$N = 85.000 / 0,70$$
$$N = 121.428,57$$

* Resposta: Pagará pelo novo débito R$ 121.428,57

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Em uma classe com 40 alunos, a porcentagem de comparecimento, certo dia, foi de 90% . Quantos alunos faltaram nesse dia ? resposta: 4

02. Numa liquidação com 20% de desconto, uma pessoa pagou por uma mercadoria R$ 56,00 menos. Quanto gastou ? resposta: R$ 280,00

03.Um livro tem marcado seu preço na capa: R$ 35,00 e é vendido pelas livrarias com 30% de lucro sobre o preço de capa. Quanto lucrou um livreiro que vendeu 180 livros ?
reposta: R$ 8.190,00

04. Uma liga de latão é formada com 65% (em peso) de cobre e o resto de zinco. Que quantidade de zinco possui uma peça de latão de 8 Kg ? resposta: 2,8Kg

05. Um comerciante comprou R$ em sapatos de homem e R$ 1.600,00 em sapatos de mulher. Sobre os sapatos de homem lucrou 40% mas perdeu 5% nos sapatos de mulher. Qual foi a porcentagem de lucro obtido na venda desses sapatos ? resposta: 20,27%

06. Vendendo por R$ 840,00 um objeto que havia custado R$ 700,00 ; qual a porcentagem do lucro obtido ? resposta: 20%

07. Uma cidade de 120.000 habitantes apresenta uma mortalidade anual de 3% da população e uma natalidade 34 por mil. Calcular o aumento da população em um ano. Resposta: 480

08. Um servidor teve aumento salarial de 40% sobre o salário de janeiro, recebendo depois outro aumento sobre o novo salário também de 40% . De quanto foi o aumento salarial total ? resposta: 96%

09. Quanto vale 25% da metade do menor número inteiro positivo formado por três dígitos distintos, e inferior a um centésimo de milhão ? resposta: 12,75

10. Se eu tivesse mais 20% do que tenho, poderia pagar uma dívida de R$ 920.000,00 e ainda ficaria com R$ 80.000,00. Qual é a quantia que possuo ? resposta: R$ 833.333,33

11. Em uma granja 20% das aves são galinhas. Entre pintinhos, frangos e galos contam-se 2.320 animais. Quantas aves existem nessa granja ? resposta: 2.900 animais

12. Depositei minha mesada de R$ 250.000,00 em poupança. Após 3 meses com juros de 20%, 30% e 40% , respectivamente, quanto tinha na poupança ? resposta: R$ 564.000,00

13. Qual é o custo de fabricação de um par de calçados que, quando vendido, dá lucro de R$ 60,00 ou 40% sobre o custo ? resposta: R$ 150,00

14. Um terreno foi vendido por R$ 16.500,00 com lucro de 10%. Em seguida foi revendido por R$ 20.700,00. Qual o percentual de lucro total das duas transações sobre o custo inicial ? resposta: 38%

15. Certa quantia foi depositada em poupança recebendo juros de 5% , 6% e 7% após três meses, respectivamente. Qual a porcentagem total de aumento ao fim dos 3 meses ?
resposta: 19,09%

16. Um produto é vendido com um lucro bruto de 20%. Sobre o preço total da nota, 10% correspondem às despesas. Qual o lucro líquido do comerciante ?

a) 5% b) 8% c) 11% d) 12%

17. Comprei um objeto por R$ 500,00. Por quanto devo vendê-lo para obter:
a) um lucro de 30% sobre o preço de venda ?
b) um lucro de 45% sobre o preço de custo ?

respostas: a) R$ 714,28
b) R$ 725,00

18. Comprei uma TV por R$ 600,00. Por quanto devo vendê-la para obter maior lucro de 35% ? Para maior lucro, a porcentagem de lucro recai sobre preço de compra ou de venda ?

resposta: devo vendê-la por R$ 923,07 recaindo a porcentagem de lucro sobre o preço de venda.

19. Na venda de certa mercadoria, um comerciante teve prejuízo equivalente a 5% do preço de venda. Se o preço de venda foi de R$ 85.500,00 ; qual foi o preço de custo ?
resposta: R$ 89.775,00

20. Na venda de um equipamento eletrônico, houve um lucro de 80% do preço de venda. Que porcentagem representa o lucro em relação ao preço de custo ? resposta: 400%

21. Qual o preço de custo de um automóvel que foi vendido por R$ 60.000,00 ; com um lucro equivalente a 50% do preço de custo ? Que porcentagem representa o lucro, se relacionado com o preço de venda ? resposta: - custo: R$ 40.000,00
- porcentagem: 33,33%

22. A produção de uma indústria de calçados passou, de 1980 a 1981, de 600 mil para 720 mil pares. Pergunta-se:
a) Qual foi o aumento percentual de produção ?
b) Qual o índice ou fator de aumento anual ?
c) Se esse índice ou fator se repetir nos anos seguintes, qual será a previsão de produção para 1983 ?

respostas: a) 20%
b) 1,20 → índice ou fator de aumento
c) será de 1.036 unidades

23. Num certo ano, o aumento das mensalidades escolares foi de 54.7%. Pergunta-se:
a) Qual foi o índice ou fator de atualização das mensalidades ?
b) Se numa escola essa mensalidade passou a ser de R$ 6l8,80 qual era o valor anterior ?
respostas: a) 1,547
b) R$ 400,00

24. Um título de crédito, de valor nominal de R$ 15.000,00 foi descontado, 40 dias antes do vencimento. Supondo uma taxa de desconto comercial simples de 0,25% a d. Ache o desconto e o valor atual desse título.
resposta: d = R$ 1.500,00 e A = R$ 13.500,00

25. Qual o valor nominal de uma Nota Promissória que foi resgatada por R$ 50.000,00 ; 2 meses antes do vencimento, sendo a taxa de desconto comercial simples de 4,8% a m ?
resposta: N = R$ 55.309,73

26. Ache a taxa de juros simples equivalente a uma taxa de desconto comercial simples de 9% a m. num prazo de 3 meses.
resposta: i_j = 12,23% a m.

27. Um banco está cobrando uma taxa de juros simples de 12% a m. para empréstimos de 60 dias. Qual a taxa de desconto por fora equivalente ?
resposta: i_d = 9,68% a m.

28. Uma financiadora faz empréstimos a curto prazo, cobrando uma taxa de desconto comercial simples de 15% a m. para empréstimos com prazo de 2 meses. Qual a taxa de juros simples equivalente ?
resposta: i_j = 23,43% a m.

29. Uma pessoa deveria pagar hoje a importância de R$ 60.000,00 a um banco. Não podendo saldar sua dívida, ela vai assinar uma NP para 90 dias. Sabendo que este banco está cobrando uma taxa de desconto comercial simples de 14,7% a m. ache o valor nominal do novo título.
resposta: N = R$ 107.334,53

30. Sr. Joaquim deveria saldar uma dívida que hoje vale R$ 100.000,00. Não podendo pagá-la, vai assumir outra para 60 dias. Sendo cobrado uma taxa de juros simples de 14,7% a m., qual será o valor nominal ou valor de face do novo título ?
resposta: N = R$ 129.400,00

31. Qual é o desconto por dentro de um título de R$ 19.200,00 a 6% a a., vencível a 1(um) ano, 1(um) mês e 10 dias ?
resposta: DD = R$ 1.200,00

32. Descontei por dentro uma LC de R$ 12.950,00 a 6% a a. um ano e quatro meses antes do vencimento. Qual foi o desconto ?
resposta: DD = R$ 959,25

33. Emiti uma NP de R$ 21.216,00 para 6 meses. Se o credor fizesse o desconto racional de 4% a a. em quanto importaria ?
resposta: DD = R$ 416,00

34. Qual é o valor do título que, descontado por dentro a 6% a a. oito meses antes do vencimento, produziu o desconto de R$ 320,00 ?
resposta: DD = R$ 8.320,00

35. De quanto era a NP descontada por dentro a 6% a a. onze meses antes do vencimento que produziu o desconto de R$ 880,00 ?
resposta: A = R$ 12.880,00

36. Aceitei uma LC vencível a um ano, um mês e 10 dias. Tendo sido descontada por dentro a 9% a a. deu R$ 1.000,00 de desconto. Qual era o valor nominal ?
resposta: N = R$ 11.000,00

37. A que taxa foi descontada por dentro a LC de R$ 3.640,00 vencível a 2 anos e 6 meses, que produziu o desconto de R$ 840,00 ?
resposta: i_d = 12% a a.

38. Um título vencível a 1 ano e 3 meses e 20 dias, de R$ 2.117,50 foi descontado por dentro, dando desconto de R$ 117,50. Qual foi a taxa ?
resposta: i_d = 4,5% a a.

39. Uma duplicata devia ser descontada hoje em banco no valor de R$ 550,00. Não podendo ser paga em tempo, estipulou-se um novo prazo de 60 dias com taxa de desconto comercial simples de 17% a m. para ser paga. Quanto se pagará pelo novo título ?
resposta: N = R$ 833,33

40. Venci hoje uma NP de R$ 8.000,00. Se assinar outra para 120 dias com taxa de desconto comercial simples de 15% a a. quanto pagarei ?
resposta: N = R$ 8.421,05

41. Uma LC devia ser paga hoje em R$ 5.500,00. Foi paga por R$ 6.500,00 após 5 meses. Determine:
a) a taxa de desconto comercial simples.
b) a taxa de juros simples equivalente.
respostas: a) i_d = 3,07%
b) i_j = 3,62%

42. Um banco cobra juros de 14% a m. para empréstimos. Venci um título de R$ 7.500,00. Querendo quitá-lo em 9 meses, qual será:
a) a taxa de desconto comercial simples ?
b) o valor futuro a ser quitado ?
resposta: a) id = 6,l9%
b) N = R$ 16.933,84

43. Um título no valor de R$ 9.500,00 devia ser pago no prazo de 4 meses a taxa de 12% a m. de desconto comercial simples. O devedor quer saber quanto pagaria se o débito atrasasse:
a) por mais 4 meses ?
b) por mais 6 meses ?
resposta: a) N = R$ 35.133,13
b) N = R$ 65.247,25

44. Na questão anterior, o credor propõe um desconto de 20% sobre o valor a pagar, se o devedor pagar o débito no prazo de 2 meses. De quanto será o débito ?
resposta: N = R$ 19.230,76 .

45. Uma NP foi paga por R$ 20.000,00 após dois atrasos de 2 meses e 4 meses respectivamente. Mantida a taxa de desconto comercial simples de 10% para reajustar o título, qual o valor presente do título antes dos atrasos ?
resposta: A = R$ 9.600,00

46. Uma duplicata foi paga por R$ 36.000,00 após ser reajustada duas vezes após 3 meses e 5 meses com taxa de desconto comercial simples de 9% e 11% ao mês, respectivamente. Qual era o valor do título antes dos reajustes ?
resposta: A = R$ 11.826,00

47. Uma NP foi paga por R$ 45.000,00 após ser reajustada três vezes com taxa de desconto comercial simples. O 1° reajuste foi após 2 meses com taxa de 5% ao mês. O 2° reajuste foi após 3 meses de espera com taxa de 7% a m. O 3° reajuste foi após 4 meses com taxa de 9% a m. Determine:

a) o valor da NP antes dos reajustes.
b) a porcentagem total de aumento que sofreu o título.
Respostas: a) A = R$ 20.476,80
b) 119,76%

48. Um título de R$ 50.000,00 foi substituído por outro de R$ 59.000,00 após 3 meses. Atrasando outra vez, foi pago por R$ 65.000,00 no prazo de 5 meses. Determine:
a) a taxa de desconto comercial simples cobrada no 2° reajuste.
b) a taxa de desconto comercial simples empregada no 1° atraso.
resposta: i_d = 1,84%
i_d = 7,69%

07. JUROS SIMPLES

01) CONCEITO:

Capital é uma riqueza capaz de produzir renda sem a intervenção do trabalho. Ao se depositar ou emprestar uma certa quantia por um determinado tempo, recebe-se uma compensação em dinheiro. Associa-se a este conceito a idéia de "juros", que é a remuneração da locação de um capital ou, em outras palavras, o custo do uso do crédito.

Juro é a compensação em dinheiro recebido ou pago. A compensação em dinheiro pelo empréstimo de um capital financeiro, a uma taxa combinada, por um prazo determinado, é chamado de juros simples quando produzida exclusivamente pelo capital inicial, também chamado de principal.

02) CÁLCULO DE JUROS SIMPLES:

É costume empregar uma fórmula (expressão padronizada) para facilitar os cálculos. Assim, chamando de "C" o capital ; de "i" a taxa do período ; de "t" o tempo (período) e de "j" o juro pago ou recebido, temos:

Capital	**Juros**	**Tempo**
100	i	1
C	j	t

$$\longrightarrow \quad i/j = 100/C \times 1/t$$

$$100 \cdot j = C \cdot i \cdot t$$

$$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$$

Com relação a esta fórmula, e ainda considerando o tempo que pode ser dado em ano, meses ou dias, vamos estabelecer as seguintes fórmulas para os respectivos casos:

$$\boxed{j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}} \longrightarrow$$ para o tempo dado em **ano: t**

$$\boxed{j = \frac{C \cdot i \cdot m}{1.200}} \longrightarrow$$ para o tempo dado em **meses: m**

$$\boxed{j = \frac{C \cdot i \cdot d}{36.000}} \longrightarrow$$ para o tempo dado em **dias: d**

De outra forma, considerando que o juro sobre o capital inicial é sempre constante, podemos ainda demonstrar a seguinte situação:

Sendo C um capital (principal) aplicado a uma taxa " i " por período, durante "n" períodos, temos que:

1) Em 1(um) período, o juros simples vale: **C . i** ;
2) A taxa e o tempo devem estar relacionados ao mesmo período ;
3) Como em todos os períodos o juro é sempre calculado sobre o capital inicial, significa que o juro simples será sempre igual a **C . i** em todos os períodos ;
4) Em "n" períodos, o total de juros será dado por: **n . C . i** ;

Portanto, sendo "j" o juro simples, temos:

$$\boxed{j = C \cdot i \cdot n}$$

Sendo: $j \rightarrow$ os juros simples
$C \rightarrow$ o capital aplicado
$i \rightarrow$ a taxa empregada
$n \rightarrow$ o tempo de aplicação

01) Exemplo: Um capital de R$ 20.000,00 foi empregado à taxa de 8% ao ano, durante 2 anos. Qual o juro produzido pelo capital ?
Resolução: Tomando-se os dados do problema, temos: j = ?
C = 20.000,00
i = 8%
t = 2 anos

Aplicando-se na fórmula, temos:

$$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100} = \frac{20.000 \times 8 \times 2}{100} = 3.200$$

De outra forma, poderíamos fazer: $j = C \cdot i \cdot n$ onde: $i = 8\% = 0{,}08$
$j = 20.000 \times 0{,}08 \times 2$
$j = 3.200$

Resposta: O juro é de R$ 3.200,00

02) Exemplo: A que taxa foi empregado um capital de R$ 50.000,00 que rendeu juros de R$ 15.000,00 durante 6 meses ?
Resolução: Tomando-se os dados do problema, temos: C = 50.000
j = 15.000
t = 6 meses

Aplicando na fórmula, temos:

$$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100} \rightarrow 15.000 = \frac{50.000 \cdot i \cdot 6}{100} \rightarrow i = \frac{15.000 \cdot 100}{6 \cdot 50.000} \rightarrow i = 5 \text{ ou } 5\% \text{ ao mês}$$

De outra forma, podemos fazer:

$j = C \cdot i \cdot n \rightarrow 15.000 = 50.000 \cdot i \cdot 6$
$i = 15.000 / 300.000$
$i = 0{,}05$
$i = 5\%$ ao mês

Resposta: O capital foi empregado a taxa de 5% ao mês.

03) Exemplo: Por quanto tempo um capital esteve aplicado em poupança tendo rendido juros equivalentes a 1/3 de sua aplicação a taxa de 30% ao mês ?

Resolução: Tomando-se os dados do problema, temos: $C = x$

$j = 1/3$ de $x = x/3$

$i = 30\%$ a m.

$t = ?$

Aplicando-se na fórmula, temos:

$$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100} \rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x \cdot 30 \cdot t}{100} \rightarrow t = \frac{100 \cdot x}{90 \cdot x} \rightarrow t = 1{,}1 \text{ mês ou } 33 \text{ dias}$$

De outra forma, podemos fazer: $j = C \cdot i \cdot n \rightarrow i = 30\% = 0{,}3$ a m.

$$x/3 = x \cdot 0{,}3 \cdot n$$
$$1/3 = 1 \cdot 0{,}3 \cdot n$$
$$n = 1/3 : 0{,}3$$
$$n = 1{,}1 \text{ mês ou } 33 \text{ dias}$$

Resposta: O capital esteve aplicado por 33 dias.

04) Exemplo: Um capital foi aplicado em 20/03/85 a taxa de 25% ao mês e retirado após render juros igual a 2/3 de sua aplicação. Determine:

a) O tempo em que o capital esteve aplicado.

b) A data em foi retirado o capital.

Resolução:

a) Tomando-se os dados do problema, temos: $C = 1$

$j = 2/3$

$i = 25\% = 0{,}25$ ao mês

$n = ?$

Aplicando-se na fórmula: $j = C \cdot i \cdot n$

$$2/3 = 1 \cdot 0{,}25 \cdot n$$
$$n = 2/3 : 0{,}25$$
$$n = 2{,}6 \text{ meses ou } 78 \text{ dias}$$

Esquematizando os dias em que o capital esteve aplicado, temos a data de retirada:

20/03/85 20/04/85 20/05/85 08/06/85

30 dias 30 dias 18 dias

78 dias → tempo em que o capital esteve aplicado

Resposta: a) O capital esteve aplicado durante 78 dias.

b) O capital foi retirado em 08/06/85.

03) MONTANTE:

Montante ou valor acumulado de um capital inicial **C** (também chamado de principal), investido a taxa **i** por período e pelo prazo de **n** períodos, é a soma do capital com os juros do capital produzido no prazo determinado. Portanto, montante é capital mais os juros.

Então temos: $\boxed{\mathbf{M = C + j}}$

Como j = C . i . n, ainda podemos fazer:

$$M = C + j$$
$$M = C + C \cdot i \cdot n$$
$$M = C.(1 + i \cdot n)$$

Logo, o montante também é dado pela expressão: $\boxed{\mathbf{M = C.(1 + i \cdot n)}}$

01) Exemplo: Achar o montante produzido por um capital de R$ 100.000,00 investido a taxa de 8,5% ao mês a juros simples durante 5 meses.

Resolução: Tomando-se os dados do problema, temos: C = 100.000
i = 8,5% = 0,085
n = 5 meses
M = ?

Aplicando na fórmula, temos:

$$M = C.(1 + i \cdot n)$$
$$M = 100.000.(1 + 0{,}085 \cdot 5)$$
$$M = 100.000.(1{,}425)$$
$$M = 142.500{,}00$$

Resposta: O montante produzido foi de R$ 142.500,00

02) Exemplo: Se os juros do capital de R$ 60.000,00 lhe corresponde a 30% , qual o valor do montante ?

Resolução: Tomando-se os dados do problema, temos: j = 30% de 60.000
j = 0,3 x 60.000
j = 18.000

Como o montante é o capital mais os juros, temos:

$$M = C + j$$
$$M = 60.000 + 18.000$$
$$M = 78.000{,}00$$

Resposta: O montante vale: M = R$ 78.000,00

03) Exemplo: Por quanto tempo um capital aplicado a taxa de 30% ao mês triplicou de valor ?

Resolução: Dados i = 30% = 0,3
C = x
M = 3x
n = ?

$$M = C.(1 + i \cdot n)$$
$$3x = x.(1 + 0{,}3 \cdot n)$$
$$3 = 1 + 0{,}3 \cdot n$$
$$n = 2 / 0{,}3$$
$$n = 6{,}6 \text{ meses ou } 198 \text{ dias.}$$

Resposta: Por 198 dias de aplicação.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Calcule os juros simples de um capital de R$ 50.000,00 empregado por 3 meses a taxa de 126% ao ano. resposta: R$ 15.750,00

02. Ache a taxa mensal que fez com que um capital investido, a juros simples, durante 16 meses, tivesse seu valor triplicado. resposta: 12,5%

03. Em quantos dias um capital aplicado a juros simples, a uma taxa de 12% ao mês rende um juro que é igual a 1/10 de seu valor ? resposta: 25 dias

04. Ache o capital que investido a juros simples durante 8 meses a 138% ao ano, produziu um montante de R$ 86.400,00 . resposta: R$ 45.000,00

05. Em quanto tempo, (anos, meses e dias), um capital aplicado a juros simples, a uma taxa de 7,5% ao mês duplica de valor ? resposta: 1 ano 1 mês 10 dias.

06. Em quantos dias um capital aplicado a uma taxa de 90% ao ano a juros simples, rende um juro igual a 1/20 de seu valor ? resposta: 20 dias

07. Uma pessoa investiu um capital de R$ 500.000,00 à taxa de juros simples de 96% ao ano do dia 25 de maio ao dia 25 de julho do mesmo ano. Calcule os juros produzidos.
resposta: R$ 81.333,333

08. Se R$ 400.000,00 rendeu R$ 42.500,00 de juros em 1 ano, 2 meses e 15 dias. Calcular quanto produzirá em 27 meses e a que taxa está empregada.
Resposta: juros = R$ 81.360,00 e i = 9,04%

09. Empregando-se US$ 9.620,00 a juros simples, a taxa de 1% ao mês, durante 3 anos e 4 meses. No fim desse tempo, quanto se recebe de volta ? resposta: US$ 13.468,00

10. Um capital foi aplicado em 10/05/90 a taxa de 35% ao mês e retirado após render juros equivalentes a 1/3 de sua aplicação. Determine:
a) o tempo em que o capital esteve aplicado.
b) a data em que foi retirado o capital.
Resposta: a) 28 dias
b) 07/06/90

11. Um capital aplicado em poupança gera montante superior a 3/5 de sua aplicação a taxa de 15% ao mês. Determine o tempo em que o capital esteve aplicado.
Resposta: 4 meses

12. Um capital aplicado em 07/05/94 foi retirado após render montante superior a 2/3 de sua aplicação a taxa de 20% ao mês. Determine:
a) o tempo em que o capital esteve aplicado.
b) a data em que foi retirada o capital.
Resposta: a) 100 dias (aprox)
b) 17/08/94

13. Dois capitais são aplicados, um a 8% ao ano durante 5 meses e outro a 6% ao ano durante 7 meses, acabam produzindo juros iguais. Sabendo que a soma dos capitais com os juros é de US$ 4.240,00 ; determine os capitais.
resposta: US$ 2.101,05 e US$ 1.999,00

14. Qual é o capital que, aplicado a 8% ao ano rende por dia US$ 70,00 ?
resposta: US$ 140.000,00

15. Se dois capitais estão entre si na razão de 8 para 3 e se o maior deles excede o menor em R$ 25.000,00 ; quanto vale a soma desses capitais ?
resposta: R$ 65.000,00

16. Se aplicarmos determinada quantia durante 8 meses, seu montante será de R$ 63.000,00. Se a aplicação fosse de 13 meses, o montante seria de R$ 74.250,00 . Qual a taxa mensal empregada ? resposta: 5%

17. A que taxa semestral esteve aplicado o capital que em 4 anos triplicou de valor ?
resposta: 25% ao semestre.

18. Durante quanto tempo esteve aplicado o capital que rendeu 5/8 de seu valor a $6\frac{1}{4}\%$ ao mês ? resposta: 10 meses

19. Os ¾ de um capital foi aplicado a 80% e o restante a 60%. No fim de um ano, o rendimento obtido foi de R$ 120.000,00 ; qual a quantia aplicada ?
resposta: R$ 160.000,00

20. Dois capitais, R$ 80.000,00 e R$ 50.000,00 foram aplicados à mesma taxa, durante 7 meses e 8 meses, respectivamente. Sabendo que o segundo capital rendeu R$ 8.000,00 a menos que o primeiro, qual a taxa mensal de aplicação ? resposta: 5% a m.

21. O que é mais vantajoso ? Empregar R$ 16.800,00 a 5% ou empregar R$ 9.500,00 a 6,5% ?
resposta: ( ) o 1° caso é mais vantajoso
( ) o 2° caso é mais vantajoso

22. Possuía um comerciante uma determinada importância colocada a juros de 9% a a. No fim de 5 anos, ao receber o montante, adquiriu um imóvel que vendido, produziu o lucro de R$ 3.480,00 equivalente a 6% de seu custo. Qual era a importância que o comerciante tinha a juros ?
resposta: R$ 40.000,00

23. Um capital esteve aplicado por 4 meses. Os juros da aplicação correspondem a 2/3 do capital. Qual a taxa empregada na aplicação ?
resposta: 16,66%

08. JUROS COMPOSTOS

01) INTRODUÇÃO:

Juro é a compensação estipulada pelo aluguel de um capital financeiro; normalmente, no exterior, chamam de “juros de interesses”.

Os juros envolvidos numa operação financeira podem ser simples ou compostos. O mercado financeiro segue integralmente a lei dos juros compostos e não a dos juros simples.

Considerando a renda relativa ao capital inicial, temos que:

1. Nos **Juros Simples,** o rendimento é sempre constante no período (ou em cada parte do período) e referido sempre ao capital inicial.

2. Nos **Juros Compostos,** o rendimento é acrescido sobre o capital inicial e calculado sobre esse montante em cada período, ou seja, os juros subsequentes são referidos à somatória do capital com os juros do período anterior. Dessa forma, vemos então que a cada período os juros estão sendo capitalizados (somados ao capital e formando um novo capital - Montante) para renderem juros sobre esse somatório.

02) DEDUÇÃO DA EXPRESSÃO GERAL DO MONTANTE:

Seguindo à risca do esquema de juros simples, lembrando que os juros ao final de cada período deva ser somado ao capital para efeito de rendimento posterior, temos a seguinte dedução do montante no caso de **Juros Compostos.**

Considerando um capital inicial **C** empregado a taxa **i** em cada parte de **n** período. A capitalização dos juros **j** sobre o capital **C** gera no final do período um montante **M** esquematizado da seguinte forma:

$M = C + j \rightarrow$ Montante é igual ao capital mais os juros.

Tendo-se a fórmula fundamental $j = C.i.t/100$, tomando-se a taxa $i/100 = i_r$ (taxa real), temos $j = C.\ i_r\ .\ t$; Como calcula-se período por período, temos $t = 1$, logo $j = C\ .\ i_r$ ou simplesmente $j = C\ .\ i$; considerando “i “ não nominal e sim seu valor real.

Então para cada período vamos ter:

$n = 1 \rightarrow j = C\ .\ i \rightarrow M = C + j \rightarrow M = C + C.\ i \rightarrow M_1 = C.(1 + i)^1$

$n = 2 \rightarrow j = M_1\ .\ i \rightarrow M = M_1 + M_1 + i \rightarrow M = C.(1 + i).(1 + i) \rightarrow M_2 = C.(1 + i)^2$

$n = 3 \rightarrow j = M_2\ .\ i \rightarrow M = M_2 + M_2 + i \rightarrow M = C.(1 + i)^2.(1 + i) \rightarrow M_3 = C.(1 + i)^3$

Se chamarmos o montante **M** de **S** (FV ou valor futuro), o $\mathbf{i_r}$ de **i** (taxa real) e **C** capital de **P** (principal ou PV valor presente), temos a fórmula geral:

$M = S$

$i_r = i$ para $n = 1 \rightarrow S = P.(1 + i)^1$

$C = P$ para $n = 2 \rightarrow S = P.(1 + i)^2$

$t = n$ para $n = 3 \rightarrow S = P.(1 + i)^3$

.

.

.

para $n = n \rightarrow \boxed{\mathbf{S = P.(1+ i)^n}} \rightarrow$ fórmula do montante.

No sentido de verificarmos a validade e utilização da expressão $S = P.(1 + i)^n$, período por período vamos empregá-la através do seguinte exemplo esquematizando em tabela abaixo:

* **Exemplo:** Aplicar um capital de R$ 700,00 a juros compostos a taxa de 4% durante 6 anos.

Demonstrando a capitalização do rendimento, ano a ano, temos a seguinte tabela:

Tabela Demonstrativa de Capitalização

n (períodos)	Capital	Juros: 4%	Montante
n = 1	700,00	28,00	728,00
n = 2	728,00	29,12	757,12
n = 3	757,12	30,38	787,40
n = 4	787,40	31,49	818,89
n = 5	818,89	32,75	851,64
n = 6	851,64	34,06	**885.70**
Juros totais	....	**185,80**	

$M = C + j$
$M = 700 + 185,80$
$M = 885,80$

Utilizando-se a expressão geral $S = P.(1 + i)^n$ para o montante no final do período temos:

$P = 700,00$ — $S = P.(1 + i)^n$
$i = 4\% = 0,04$ — $S = 700.(1 + 0,04)^6$
$n = 6$ — $S = 700.(1,04)^6$
$S = ?$ — $S = 700.(1,2653189)$
$S = 885,72$

Nota: Observe que utilizando-se a expressão do montante dada por $S = P.(1 + i)^n$ ou recorrendo-se a tabela demonstrativa de capitalização, período a período, vamos chegar ao mesmo resultado.

A expressão do montante permite-nos também calcular o valor acumulado ao fim de qualquer período. Vejamos:

Seja calcular o montante no final do 3° ano de aplicação.

Nesse caso, temos: $P = 700$ — $S = P.(1 + i)^n$
$i = 0,04$ — $S = 700.(1 + 0,04)^3$
$n = 3$ — $S = 700.(1,04)^3$
$S = ?$ — $S = 700.(1,124864)$
$\mathbf{S = 787,40}$

Você pode observar então nas linhas da tabela e encontrar os mesmos resultados calculados pela expressão $S = P.(1 + i)^n$. Podemos notar também que os juros totais embutidos no final do período é dado pela somatória da coluna dos **Juros** na tabela, de forma que verificamos ainda a expressão: Montante é igual a capital mais juros. $\mathbf{S = P + j}$, ou que os juros podem ser obtidos pela diferença: $\mathbf{j = S - P}$

$j = 885,70 - 700$

$j = 185,70$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Um capital de R$ 500,00 é aplicado a taxa de 5% a m. a juros compostos durante 6 meses. Determine:
a) o montante no final do 3° período.
b) o montante no final do período (no fim dos 6 meses).
c) os juros embutidos no final do período.
d) faça uma **Tabela** demonstrativa de capitalização mês a mês.

Resolução: Sendo dados $P = 500{,}00$
$i = 5\% = 0{,}05$ ao mês
$n = 6$ meses

a) para $n = 3 \rightarrow S = P.(1 + i)^n \rightarrow S = 500.(1 + 0{,}05)^3$
$S = 500.(1{,}05)^3$
$S = 500.(1{,}157625)$
$\mathbf{S = 578{,}81}$

b) para $n = 6 \rightarrow S = P.(1 + i)^n \rightarrow S = 500.(1 + 0{,}05)^6$
$S = 500.(1{,}05)^6$
$S = 500.(1{,}3400955)$
$\mathbf{S = 670{,}04}$

c) os juros embutidos no final do período são tirados por: $M = C + j$ ou
$S = P + j$
$S - P = j$
$j = 670{,}04 - 500$
$\mathbf{j = 170{,}04}$

d) Tabela demonstrativa de capitalização mês a mês:

n	Capital	Juros	Montante
1	500,00	25,00	525,00
2	525,00	26,25	551,25
3	551,25	27,56	**578,81**
4	578,81	28,94	607,75
5	607,75	30,38	638,13
6	638,13	31,90	**670,03**
	Juros totais	**170,03**	

Nota: Observe na Tabela os valores correspondentes aos itens a), b) e c). A somatória da coluna dos **Juros** mostram os juros embutidos no final do período de aplicação.

Respostas: a) S = R$ 578,81 b) S = R$ 670,04 c) j = 170,04 d) Vide resolução

2) Qual o capital que deve ser empregado hoje para se obter um montante de R$ 2.000,00 daqui a 14 meses a uma taxa de 6% ao ano ?

Resolução: Note que a taxa e o tempo de aplicação devem estar relacionados ao mesmo período. Assim: tempo = 14 meses
taxa = 6% ao ano = ? ao mês

Vamos calcular a taxa mensal equivalente a 6% ao ano, pois em juros compostos devemos usar taxas equivalentes de um período a outro.

$(1 + i_a)^n = (1 + i_m)^k$ — onde: i_a = taxa anual
$(1 + 0{,}06)^1 = (1 + i_m)^{12}$ — i_m = taxa mensal
$(1{,}06)^1 = (1 + i_m)^{12}$ — $n \longleftrightarrow k$ = equivalência de períodos
$(1{,}06)1/12 = (1 + i_m)$ — $n = 1 \longleftrightarrow k = 12$
$(1{,}004867551) = (1 + i_m)$ — 1 ano = 12 meses
$i_m = 1{,}004867551 - 1$
$i_m = 0{,}004867551$ $\rightarrow$ taxa mensal equivalente a 6% anual.

Agora temos tempo dado em meses e taxa dada ao mês. E estando taxa e tempo relacionados ao mesmo período, aplicamos na expressão do montante.

$S = 2.000$
$i_m = 0{,}004867551$ ao mês
$n = 14$ meses
$P = ?$

$S = P.(1 + i_m)^n$
$2.000 = P.(1 + 0{,}004867551)^{14}$
$2.000 = P.(1{,}004867551)^{14}$
$2.000 = P.(1{,}070344328)$
$P = 2.000 / (1{,}070344328)$
$\mathbf{P = 1.868{,}55}$

De outra forma, podemos fazer: 1 ano .... 12 meses
y .... 14 meses

$12 . y = 14$
$y = 14/12$
$y = 1{,}166666...$ anos

Temos agora: n = l,l666666... anos
i = 6% = 0,06 ao ano

Aplicando na expressão do montante, temos:

$S = P.(1 + i_a)^n$
$2.000 = P.(1 + 0{,}06)^{1{,}1666666...}$
$2.000 = P.(1{,}06)^{1{,}1666666}$
$2.000 = P.(1{,}070344322)$
$P = 2.000 / (1{,}070344322)$
$\mathbf{P = 1.868{,}55}$

Nota: De qualquer forma, usando a equivalência de taxas ao mês ou ao ano, verificamos os mesmos resultados. O importante é que sejam considerados taxa e tempo equivalentes ao mesmo período: taxa ao mês - tempo em meses ou taxa ao ano - tempo em anos, pois em juros compostos usamos taxas equivalentes quando relacionadas a um certo período de tempo.

Resposta: O capital é de R$ 1.868,55

3) Um capital de R$ 7.600,00 investido a taxa de 0,8% ao mês gerou montante no período de 4 anos. Determine:
a) a taxa de juros ao ano.
b) o montante no final do período.
c) faça uma Tabela demonstrativa de capitalização ano a ano.

Resolução: Sendo dados $P = 7.600$
$n = 4$ anos ou 48 meses
$i = 0{,}8\% = 0{,}08$ ao mês = ? ao ano

a) Vamos calcular a taxa de juros ao ano.

$$(1 + i_a)^n = (1 + i_m)^k$$
$$(1 + i_a)^1 = (1 + 0{,}008)^{12}$$
$$(1 + i_a)^1 = (1{,}008)^{12}$$
$$(1 + i_a)^1 = (1{,}100338694)$$
$$i_a = 1{,}100338694 - 1$$
$$\text{taxa anual} \rightarrow i_a = 0{,}100338694 \text{ ou } 10{,}03\ \%$$

b) o montante no final do período é dado das seguintes formas:

Posso considerar a taxa em meses e o tempo ao mês: $i_m = 0{,}8\% = 0{,}008$ ao mês
tempo = 4 anos = 48 meses
Aplicando na expressão do montante, temos:

$$S = P.(1 + i_m)^n$$
$$S = 7.600.(1 + 0{,}008)^{48}$$
$$S = 7.600.(1{,}008)^{48}$$
$$S = 7.600.(1{,}465904038)$$
$$\mathbf{S = 11.140{,}87}$$

Posso considerar a taxa ao ano e tempo em anos: $i_a = 0{,}100338694$ ao ano
$n = 4$ anos
Aplicando na expressão do montante, temos:

$$S = P.(1 + i_m)^n$$
$$S = 7.600.(1 + 0{,}100338694)^4$$
$$S = 7.600.(1{,}100338694)^4$$
$$S = 7.600.(1{,}46590404)$$
$$\mathbf{S = 11.140{,}87}$$

c) Tabela demonstrativa de capitalização ano a ano.

n	Capital	Juros: 0,100338694	Montante
1	7.600	762,57	8.362,57
2	8.362,57	839,08	9.201,65
3	9.201,65	923,28	10.124,93
4	10.124,93	1.015,92	**11.140,85**
	Juros totais	.... **3.540,85**	

Nota: Observe na tabela os valores correspondentes aos cálculos feitos pela expressão do montante.

Respostas: a) taxa anual $\rightarrow i_a = 10{,}0338694\%$ b) R$ 11.140,87 c) Vide resolução

- **OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:**

Em alguns casos, na resolução de problemas, teremos de aplicar também nossos conhecimentos em logaritmos para calcular alguns parâmetros da expressão geral do montante (taxa ou tempo).

Como teremos que aplicar convenientemente logaritmos na base 10, sugerimos que os alunos revisem os logaritmos decimais (Tábua de Logaritmos Decimais - Mantissas) para que possamos recorrer a esse requisito.

Apresentaremos a seguir a solução de alguns problemas que recorrem a utilização de logaritmos.

1) Um capital de R\$ 50.000,00 investido a taxa de 25% ao mês gera montante de R\$ 150.000,00. Por quanto tempo o capital esteve aplicado ?

Resolução: Dados S = 150.000,00
P = 50.000,00
i = 25% = 0,25 ao mês
n = ? (meses)

Utilizando-se os dados na expressão do montante, teremos o tempo em meses.

$$S = P.(1 + i)^n \rightarrow 150.000 = 50.000.(1 + 0,25)^n$$
$$150.000 / 50.000 = (1,25)^n$$
$$3 = (1,25)^n$$

Aplicando-se logaritmos em ambos os membros, temos: $\text{Log } 3 = \text{Log } (1,25)^n$

$$\text{Log } 3 = n . \text{Log } (1,25)$$
$$n = \text{Log } 3 / \text{Log } (1,25)$$
$$n = 0,477121 / 0,09691$$
$$n = 4,92 \text{ ou}$$
$$n = 5$$

Resposta: O capital esteve aplicado durante 5 meses.

2) Um capital de R\$ 150.000,00 aplicado em 5 anos gerou montante de R\$ 750.000,00. Determine a taxa de aplicação.

Resolução: Dados S = 750.000,00
P = 150.000,00
n = 5 anos
i = ? (taxa anual)

Utilizando a expressão geral do montante, temos: $S = P.(1 + i)^n$

$$750.000 = 150.000.(1 + i)^5$$
$$750.000 / 150.000 = (1 + i)^5$$
$$5 = (1 + i)^5$$

Aplicando-se logaritmos em ambos os membros da expressão anterior, temos:

$$\text{Log } 5 = \text{Log } (1+i)^5 \rightarrow \text{Log } 5 = 5 \,.\, \text{Log } (1+i)$$
$$\text{Log } (1+i) = \text{Log } 5 / 5$$
$$\text{Log } (1+i) = 0{,}698970 / 5$$
$$\text{Log}_{10}(1+i) = 0{,}139794001$$
$$(1+i) = 10^{0{,}139794001}$$
$$(1+i) = 1{,}379729662$$
$$i = 1{,}379729662 - 1$$
$$i = 0{,}379729662$$
$$i = 37{,}97\%$$

Resposta: A taxa de aplicação foi de 37,97% .

3) Em 29/03/84, aplicou-se um capital de US$ 100,00 em caderneta de poupança. O saldo obtido em 29/08/87 foi de US$ 250,00. Determine:
a) a taxa anual de capitalização.
b) a taxa mensal de capitalização.

Resolução: Note que o período de 29/03/84 até 29/08/87 encerra em 3 anos.

29/03/84 29/03/85 29/03/86 29/03/87

1 ano 1 ano 1 ano → 3 anos

a) Para o cálculo da taxa anual, temos:

$S = 250{,}00$
$P = 100{,}00$
$n = 3$ anos
$i = ?$

$$S = P.(1+i)^n$$
$$250 = 100.(1+i)^3$$
$$250 / 100 = (1+i)^3$$
$$2{,}5 = (1+i)^3$$

Aplicando-se logaritmos em ambos os membros da expressão temos:

$$\text{Log } 2{,}5 = \text{Log } (1+i)^3$$
$$\text{Log } 2{,}5 = 3 \,.\, \text{Log } (1+i)$$
$$\text{Log } 2{,}5 = 3 \,.\, \text{Log } (1+i)$$
$$0{,}397940009 / 3 = \text{Log } (1+i)$$
$$\text{Log}_{10}(1+i) = 0{,}132646670$$
$$(1+i) = 10^{0{,}132646670}$$
$$(1+i) = 1{,}357208810$$
$$i = 1{,}357208810 - 1$$
$$i = 0{,}357208810$$
$$\mathbf{i = 35{,}72\ \%}$$

b) Calculando a taxa mensal equivalente, temos:

$$(1+i_a)^n = (1+i_m)^k$$
$$(1 + 0{,}357208810)^1 = (1+i_m)^{12}$$
$$(1{,}357208810)^{1/12} = (1+i_m)$$
$$(1{,}357208810)^{0{,}08333333} = (1+i_m)$$
$$1{,}025779201 = (1+i_m)$$
$$i = 1{,}025779201 - 1$$
$$i = 0{,}025779201 \text{ ou } \mathbf{2{,}57\ \%}$$

Respostas: a) taxa anual: 35,72 % b) taxa mensal: 2,57 %

4) Um capital aplicado a juros compostos gera juros equivalentes a 25% de seu valor após 6 meses de aplicação. Qual a taxa empregada na aplicação ?

Resolução: De acordo com o problema, temos: $j = 25\%$ de P

$j = 1/4$ de P $\rightarrow$ P = x

$j = x/4$

$n = 6$ meses

Como $S = P + j$, temos:

$$S = x + x/4$$

$$S = \frac{5x}{4}$$

Aplicando na expressão do montante, temos:

$$S = P.(1 + i)^n$$

$$\frac{5x}{4} = x.(1 + i)^6$$

$$5/4 = (1 + i)^6$$

Aplicando logaritmos, temos:

$$\text{Log}(5/4) = \text{Log}(1 + i)^6$$

$$\text{Log } 5 - \text{Log } 4 = 6 . \text{Log}(1 + i)$$

$$\text{Log}(1 + i) = \frac{\text{Log } 5 - \text{Log } 4}{6}$$

$$\text{Log}(1 + i) = \frac{0{,}698970004 - 0{,}602059991}{6}$$

$$\text{Log}(1 + i) = 0{,}096910013 / 6$$

$$\text{Log}_{10}(1 + i) = 0{,}016151669$$

$$(1 + i) = 10^{0{,}016151669}$$

$$(1 + i) = 1{,}037890816$$

$$i = 1{,}037890816 - 1$$

$$i = 0{,}037890816 \quad \text{ou} \quad \mathbf{3{,}78\ \%}$$

Resposta: a taxa foi de 3,78 %

5) Um rendimento gera montante superior a 3/7 de sua aplicação e foi empregado com taxa de 15% ao ano. Por quanto tempo esteve aplicado ?

Resolução: Pelo problema, o montante excede o capital em 3/7 que correspondem os juros.

Sendo $P = x \rightarrow S = x + \frac{3x}{7} \rightarrow S = \frac{10x}{7}$

Aplicando na expressão do montante, temos: $S = P.(1 + i)^n \rightarrow \frac{10x}{7} = x.(1 + 0{,}15)^n$

$$10/7 = (1{,}15)^n$$

Aplicando logaritmos a ambos os membros, temos:

$$\text{Log}(10/7) = \text{Log}(1{,}15)^n$$

$$\text{Log } 10 - \text{Log } 7 = n . \text{Log}(1{,}15)$$

$$n = \frac{\text{Log } 10 - \text{Log } 7}{0{,}060697840} \rightarrow n = \frac{1 - 0{,}845098040}{0{,}060697840} \rightarrow n = \frac{0{,}154901960}{0{,}060697840}$$

n = 2,5

Resposta: O capital esteve aplicado por 2,5 anos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Calcule o montante do capital de R$ 5.000,00 a juros compostos empregado a taxa de 4% a a. e capitalizados semestralmente durante 2 anos.

02. Calcule o montante de um capital de R$ 720.000,00 empregado a taxa de 0,5% a m. no fim de 1 ano 4 meses e 10 dias.

03) Admitindo que o crédito de juros de uma instituição bancária seja mensal, determine:
a) o saldo produzido por R$ 120.000,00 em 8 meses a 20% a m.
b) o capital que após 5 meses, a 24% a m. produz um saldo de R$ 35.179,50.
c) a taxa de juros que produz um saldo de R$ 149.299,20 em 6 meses com aplicação de R$ 50.000,00.

04) Um capital de R$ 8.000,00 investido a taxa de 17% a a. foi aplicado em 5 anos. Determine:
a) o saldo no final do 3° ano.
b) o saldo no final do período.
c) os juros totais no final do período.
d) faça uma Tabela demonstrativa de capitalização ano a ano.

05) Uma loja financia um bem de consumo durável no valor de R$ 320 mil sem entrada para pagamento em uma única prestação de R$ 404.900,00 no final de 6 meses. Qual a taxa cobrada pela loja ?

06) Determine em que prazo um empréstimo de R$ 11.000,00 pode ser quitado num único pagamento de R4 22.125,00 sabendo que a taxa envolvida é de 15% ao semestre a juros compostos.

07) Em quanto tempo um capital duplica de valor, a juros compostos, pela taxa de 3% a m. ?

08) Uma aplicação de R4 200.000,00 a 4,5% a m. é capitalizada mensalmente durante 5 meses. Construa uma Tabela demonstrativa de capitalização e, com base nela, determine:
a) o montante no final do 3° mês.
b) o montante no final do período.
c) os juros totais resultante no final do período.

09) Um capital, empregado a juros compostos, que triplica de valor ao fim de 5 anos, foi empregado a que taxa ?

10) A que taxa anual devemos aplicar um capital de modo que os juros totais no final de 4 bimestre corresponda a 50% do capital aplicado ?

11) Um capital aplicado a juros compostos, a taxa trimestral de 4,5% gera rendimento equivalente ao triplo de seu valor. Determine o período de aplicação:
a) sendo a aplicação trimestral
b) se a aplicação fosse mês a mês
c) se a aplicação fosse ano a ano

12) Um capital aplicado a juros compostos gera juros equivalentes a 4/5 de sua aplicação após 8 meses. Determine a taxa empregada na situação.

13) Um capital aplicado a juros compostos gera juros equivalentes a 3/7 de sua aplicação após 7 meses. Determine a taxa empregada no período.

14) Um rendimento (montante) superior a 3/8 de uma aplicação foi empregado a taxa de 7,8% ao mês. Por quanto tempo foi empregado o capital ?

15) Um rendimento (montante) superior a 5/7 de sua aplicação foi empregado em 5 anos. Qual a taxa empregada na situação ?

16) Um capital foi aplicado em 01/04/90 sendo retirado um montante superior a 5/7 de sua aplicação em 01/04/92. Qual a taxa empregada na situação ?

17) Os juros de uma aplicação correspondem a 1/3 do valor aplicado. Sendo a taxa de 15% ao mês, por quanto tempo o capital esteve aplicado ?

18) Por quanto tempo um capital triplica de valor usando a taxa bimestral de 45% ?

19) Um capital dobra de valor se utilizar taxa de 35% ao semestre. Por quanto tempo devo esperar ?

09. TAXAS DE JUROS

01) INTRODUÇÃO:

O rendimentos que se obtém ao aplicar um capital por um período de tempo está relacionado a um fator constante de crescimento o qual denominamos de **taxa**, cuja notação é expressa em percentual (%).

A taxa pode ser definida como a razão entre o rendimento resultante e o capital por ele gerado. Dessa forma temos:

$$\textbf{taxa} = \frac{\textbf{rendimento}}{\textbf{capital}}$$

Podemos também deduzi-la da forma: **J = P . i**

Sendo: J = juros ou rendimentos **i = J / P**

P = principal ou capital.

i = taxa

* **Por Exemplo**: Se uma grandeza passa de 4 para 5, a taxa de crescimento é obtida da seguinte forma:

Rendimento: $J = 5 - 4 = 1$	taxa $\rightarrow$ $i = J / P$
Principal: $P = 4$	$i = 1 / 4$
taxa: $i = ?$	**$i = 0{,}25$ ou $i = 25\%$**

Nos problemas de juros e capitalizações, as taxas devem estar sempre relacionadas as unidades de tempo dos períodos de aplicação, ou seja, a taxa e o tempo devem se referir ao mesmo período de aplicação. Entretanto, nem sempre as taxas satisfazem essas condições. Portanto, veremos as diversas modalidades de se fornecer as taxas e mostrar como adequá-las ao mesmo período de aplicação.

02) TAXA EFETIVA OU REAL:

É a taxa em que coincide ou se referencia com a mesma unidade de tempo dos períodos de capitalização.

As taxas efetivas ou reais são assim enunciadas:

a) 5% ao mês, ou 5% a. m. , capitalizadas mensalmente;
b)10% ao trimestre, ou 10% a. t. , capitalizados trimestralmente;
c) 15% ao semestre, ou 15% a. s. , capitalizados semestralmente;
d) 20% ao ano, ou 20% a. a. , capitalizados anualmente.

Devido a coincidência com as medidas de tempo, costuma-se simplesmente indicar as taxas efetivas da seguinte forma:

a) 5% ao mês, ou 5% a. m. → cinco por cento ao mês.
b)10% ao trimestre, ou 10% a. t. → dez por cento ao trimestre.
c) 15% ao semestre, ou 15% a. s. → quinze por cento ao semestre.
d) 20% ao ano, ou 20% a. a. → vinte por cento ao ano.

As taxas efetivas ou reais são as que estão envolvidas diretamente no processo de capitalização das aplicações financeiras, pois são utilizadas no mesmo indicado pelo período de capitalização.

01) Exemplo: Um capital de R$ 500,00 acumulou-se para R$ 650,00 ao final de 1 ano. Qual a taxa de juros no período ?

* Resolução: Do problema tiramos os dados: P = 500,00
M = 650,00
n = 1
i = ?

Aplicando a ralação $\textbf{taxa} = \dfrac{\textbf{rendimento}}{\textbf{Capital}}$ para o período de 1 ano, teremos a taxa anual.

Capital: P = 500
Rendimento: J = 650 - 500 = 150
Taxa: i = J / P
i = 150 / 500
i = 0,3 ou i = 30% a. a.

02) Exemplo: Aplicando-se R$ 7.500,00 a taxa de 17% a. a. , quanto se retira ao fim de 4 anos, a juros compostos ?

* Resolução: Do problema tiramos os dados: P = 7.500,00
n = 4 anos
i = 17% a .a. = 0,17
S = ?

Notamos que ataxa e o tempo estão relacionados ao mesmo período de aplicação, ou seja, taxa ao ano e tempo ao ano. Logo aplicando-se os dados na expressão geral do montante, teremos o valor acumulado ao final dos 4 anos. Vejamos:

$S = P.(1 + i)^n$
$S = 7.500(1 + 0,17)^4$
$S = 7.500(1,17)^4$
$\mathbf{S = 14.054,15}$

03) Exemplo: Um capital de R$ 5.500,00 foi aplicado a taxa de 7% a. a. durante 30 meses. Determinar quanto se retira no final do período de aplicação.

* Resolução: Tomando-se os dados do problema, temos: P = 5.500,00
i = 7% a.a.
n = 30 meses = 2,5 anos
S = ?

$S = P.(1 + i)^n \rightarrow S = 5.500.(1 + 0,07)^{2,5}$
$S = 5.500(1,07)^{2,5}$
$\mathbf{S = 6.513,61}$

Note que neste caso, preferimos transformar o tempo no mesmo período indicado pela taxa.

3) TAXAS PROPORCIONAIS:

Duas taxas distintas são ditas proporcionais quando aplicadas a um mesmo principal durante o mesmo prazo, produzirem o mesmo valor acumulado.

O conceito de taxas proporcionais está diretamente ligado ao regime de juros simples, de forma que uma taxa poderá ser relacionada ao período ou as partes do período indicado.

Quando ouvimos a expressão como **"24% ao ano com capitalização mensal"** estamos nos referindo a taxas proporcionais, e significa que a taxa utilizada na operação não é a taxa de 24% a.a. anunciada, e sim a taxa mensal de 2% a.m. que foi proporcionalmente dividida nas 12 unidades de tempo do período anual. Na verdade, uma taxa de 24% a.a. corresponde proporcionalmente a 2% a.m. Daí, dizemos que as taxas de 24% a.a e de 2%a.m. são taxas proporcionais.

Algumas afirmativas abaixo enfatizam a idéia de taxas proporcionais acompanhadas de seus significados.

a) 48% a.a. capitalizados mensalmente, significa 4% a.m. , pois:
1 ano = 12 meses.
48 : 12 = 4 (por mês).

b) 20% a.a. capitalizados trimestralmente, significa 5% a.t. , pois:
1 ano = 4 trimestres.
20 : 4 = 5 (por trimestre).

c) 15% a.a. capitalizados quadrimestralmente, significa 5% a.q., pois:
1 ano = 3 quadrimestres.
15 : 3 = 5 (por quadrimestre).

d) 24% a.a. capitalizados semestralmente, significa 12% a.s. , pois:
1 ano = 2 semestres.
24 : 2 = 12 (por semestre).

01) Exemplo: Quais as taxas mensal, trimestral e semestral que são proporcionais a taxa de 72% ao ano ?
Resolução: Sendo de 72% a.a. temos que:

* taxa mensal proporcional é de **6% a.m**. , pois:
1 ano = 12 meses.
72 : 12 = 6 (por mês).

* a taxa trimestral proporcional é de **18% a.t.** , pois:
1 ano = 4 trimestres.
72 : 4 = 18 (por trimestre).

* a taxa semestral proporcional é de **36% a.s.** , pois:
1 ano = 2 semestres.
72 : 2 = 36 (por semestre).

* Resposta: As taxas pedidas são 6% a.m. ; 18% a.t. e 36% a.s.

02) Exemplo: Uma taxa semestral de 18% é utilizada com capitalização mês a mês.
Para uma aplicação de R$ 800,00 ; quais os rendimentos (juros) obtidos no final de:
a) 1 ano.
b) 2 trimestres.

c) 4 bimestres.

* Resolução: Tirando-se os dados do problema, temos C = 800,00
i = 18% a.s.

a) Para obtermos os rendimentos no período de um ano, devemos saber qual a taxa mensal, pois a aplicação de R$ 800,00 será capitalizada mês a mês.

18% ao semestre corresponde proporcionalmente a 3% ao mês.

Utilizando-se a expressão dos juros simples, temos: **J = C . i . n**

J = ? J = 800 x 0,03 x 12

C = 800,00 **J = 288,00**

i = 3% = 0,03

b) Para obtermos os juros no final de 2 trimestres, com capitalização mês a mês, usamos a expressão dos juros simples.

Temos que: i = 3% = 0,03 **J = C . i . n**

C = 800,00 J = 800 x 0,03 x 6

n = 2 trimestres ou 6 meses. **J = 144,00**

c) Para o cálculo dos rendimentos em 4 bimestres temos os dados: C = 800,00
i = 0,03
n = 4 bim. = 8 meses
J = ?

J = C . i . n
J = 800 x 0,03 x 8
J = 192,00

* Respostas: a) J = 288,00
b) J = 144,00
c) J = 192,00

03) Exemplo: Qual o montante no final de 3 anos, aplicado um capital de R$ 950,00 ; a uma taxa de 2% a. m. , capitalizados semestralmente ?

* Resolução: Do problema tiramos os dados: C = 950,00
n = 3 anos = 6 semestres
i = 2% a.m. = 12% a.s. = 0,12
M = ?

Utilizamos a expressão do montante: **M = C.(1 + i.n)**
M = 950,(1 + 0,12 x 6)
M = 950.(1,72)
M = 1.634,00

* Resposta: O montante no final dos 3 anos, capitalizados semestralmente, é R$ 1.634,00

04) TAXAS EQUIVALENTES:

Duas ou mais taxas são ditas equivalentes quando estão deduzidas em períodos distintos mas que produzem de um mesmo capital o mesmo valor acumulado no final do prazo de aplicação.

O conceito de taxas equivalentes está portanto, diretamente ligado ao regime de juros compostos. A diferença entre taxas proporcionais e taxas equivalentes se prende exclusivamente ao regime de juros considerado. As taxas proporcionais se baseiam em juros simples e as taxas equivalentes em juros compostos.

Utilizamos as expressões abaixo para obter e relacionar as taxas indicadas com as taxas equivalentes solicitadas conforme o período de aplicação do capital.

$$(1 + i_a)^1 = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_b)^6 = (1 + i_t)^4 = (1 + i_s)^2 \rightarrow \text{ expressão geral}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

Anual mensal

bimestral trimestral

Relacionando-se as expressões duas a duas, podemos obter a equivalência entre as taxas em qualquer período.

01) Exemplo: Um capital é aplicado a taxa de 5% ao mês. Determinar:

a) a taxa anual equivalente.
b) a taxa semestral equivalente.
c) a taxa trimestral equivalente.

a) Para encontrarmos a taxa anual equivalente a taxa mensal de 5%, usamos a expressão:

$(1 + i_a)^1 = (1 + i_m)^{12}$
$(1 + i_a)^1 = (1 + 0{,}05)^{12}$
$1 + 1_a = (1{,}05)^{12}$
$1 + 1_a = 1{,}795856326$
$i_a = 1{,}795856326 - 1$
$i_a = 0{,}795856326$
$\mathbf{i_a = 79{,}58\%}$

b) Para encontrarmos a taxa semestral equivalente a taxa de 5% a.m., usamos a expressão:

$(1 + i_s)^1 = (1 + i_m)^6$
$(1 + i_a)^1 = (1 + 0{,}05)^6$
$1 + i_a = (1{,}05)^6$
$1 + i_a = 1{,}340095641$
$i_a = 1{,}340095641 - 1$
$i_a = 0{,}340095641$
$\mathbf{i_a = 34\%}$

c) Para encontrarmos a taxa trimestral equivalente a taxa de 5% a.m. usamos a expressão:

$(1 + i_t)^1 = (1 + i_m)^3$
$(1 + i_t)^1 = (1 + 0{,}05)^3 \rightarrow 1 + i_t = (1{,}05)^3$
$1 + i_t = 1{,}15762500$
$i_t = 1{,}15762500 - 1$
$i_t = 0{,}157625$
$\mathbf{i_t = 15{,}76\%}$

* Respostas: Vide resolução.

02) Exemplo: Qual o montante acumulado no final de 4 anos ao se aplicar um capital de R$9.500,00 com taxa de 6%a.s. no regime de juros compostos ?

* Resolução: Do problema, tiramos os dados: P = 9.500,00
n = 4 anos
i = 6% a.s. = 0,06 a.s.
S = ?

Devemos colocar a taxa e o tempo relacionados a um mesmo período de aplicação.
Vemos que o tem é dado em anos e a taxa está indicada ao semestre.
O cálculo do montante poderá ser feito de duas formas. Vejamos:

* Encontramos a taxa anual equivalente a taxa semestral e aplicamos na expressão geral do montante:

$(1 + i_a)^1 = (1 + i_s)^2$
$1 + i_a = (1 + 0,06)^2$
$1 + ia = (1,06)^2$
$1 + ia = 1,123600$
$i_a = 1,123600 - 1$
$i_a = 0,123600$
$\mathbf{i_a = 12,36\%}$

$S = P . (1 + i)^n$
$S = 9.500.(1 + 0,1236)^4$
$S = 9.500.(1,1236)^4$
$\mathbf{S = 15.141,55}$

* Contamos o número de semestres que há em 4 anos e aplicamos esse tempo em semestre na expressão do montante com a taxa ao semestre.

1ano = 2 semestres
4 anos = 8 semestres

$S = P.(1 + i)^n$
$S = 9.500.(1 + 0,06)^8$
$S = 9.500.(1,06)^8$
$\mathbf{S = 15.141,55}$

03) Exemplo: Um capital de R$ 10.300,00 é aplicado a taxa de 7% a.m. sendo capitalizado trimestralmente. Qual o montante a retirar no final de 3 anos ?

Devemos colocar a taxa e o tempo relacionados a um mesmo período de aplicação.
O cálculo do montante poderá ser feito da seguinte forma:

Colocamos a taxa e o tempo indicados ao ano e aplicamos na expressão geral do montante.
Colocamos a taxa e o tempo indicados ao trimestre e aplicamos na expressão geral do montante.
Colocando-se a taxa e o tempo indicados ao ano, temos:

$(1 + i_a)^1 = (1 + i_m)^{12}$
$(1 + i_a)^1 = (1 + 0,07)^{12}$
$(1 + i_a)^1 = (1,07)^{12}$
$(1 + i_a) = 2,252191589$

$S = P.(1 + i)^n$
$S = 10.300.(1 + i_a)^3$
$S = 10.300.(2,252191589)^3$
$\mathbf{S = 117.666,54}$

* Resposta: O montante a retirar será R$ 117.666,54

05) TAXA NOMINAL OU EFETIVA:

A taxa nominal é aquela em que a unidade de tempo indicada não coincide com o período de capitalização.
A taxa nominal é quase sempre indicada em termos anuais, e os períodos de capitalização podem ser semestrais, trimestrais, mensais, etc.
A taxa nominal nunca é usada nos cálculos de rendimentos. O que interessa é a taxa efetiva embutida na taxa nominal, pois ela será efetivamente aplicada em cada período de aplicação.

A obtenção das taxas efetivas, dada uma taxa nomina i_N é muito semelhante as taxas proporcionais, sendo essa obtenção feita no regime de juros simples. Entretanto, devemos encontrar a taxa equivalente a taxa efetiva da nominal pelo regime de juros compostos de acordo com o período de capitalização.

Vejamos, por exemplos, os enunciados abaixo sobre a obtenção das taxas efetivas embutidas nas taxas nominais. As taxas efetivas são decorrentes das taxas nominais.

a) 24% ao ano capitalizados mensalmente, significa uma taxa de 2% ao mês, pois:
1 ano = 12 meses.
24 : 12 = 2 (por mês)

b) 10% ao ano capitalizados trimestralmente, significa uma taxa de 2,5% ao trimestre, pois:
1 ano = 4 trimestre
10 : 4 = 2,5 (por trimestre)

c) 17% ao ano capitalizados semestralmente, significa uma taxa de 8,5% ao semestre, pois:
1 ano = 2 semestres
17 : 2 = 8,5 (por semestre)

Para efeito de capitalização, devemos utilizar a taxa equivalente a taxa efetiva encontrada a partir da nominal. Dada uma taxa nominal i_N , obtemos a taxa efetiva decorrente de acordo com o período de capitalização e, em seguida, determinamos a taxa equivalente correspondente a taxa efetiva, chamada de **taxa efetiva equivalente.**

Vejamos os exemplos a seguir.

01) Exemplo: Qual a taxa equivalente anual da taxa nominal de 48% ao ano capitalizados:
a) mensalmente.
b) trimestralmente.

* Resolução:

a) Sendo 48% a.a. a taxa nominal com capitalização mensal, a taxa efetiva decorrente será 4% a. m. , pois: 48 : 12 = 4.

A taxa anual equivalente a taxa efetiva de 4% a.m. é dada pela expressão a seguir:

$(1 + i_a)^1 = (1 + i_m)^{12}$

$(1 + i_a) = (1 + 0,04)^{12}$

$(1 + i_a) = (1,04)^{12}$

$(1 + i_a) = (1,601032219)$

$i_a = 1,601032219 - 1$

$i_a = 0,601032219$

i_a = 60,10% a.a.

b) Sendo 48% a.a. a taxa nominal com capitalização trimestral , a taxa efetiva decorrente será 12% a. t. , pois: 48 : 4 = 12.

A taxa anual equivalente a taxa efetiva de 12% a.t. é obtida pela expressão a seguir:

$(1 + i_a) = (1 + i_t)^4$

$(1 + i_a) = (1 + 0,12)^4$

$(1 + i_a) = (1,12)^4$

$(1 + i_a) = 1,57351936$

$i_a = 1,57351936 - 1$

$i_a = 0,57351936$

i_a = 57,35% a.a.

02) Exemplo: Qual a taxa efetiva trimestral equivalente a uma taxa nominal de 33% ao ano capitalizados mensalmente ?

* Resolução: Temos a taxa nominal de 33% a.a. A taxa efetiva decorrente é 33 : 12 = 2,75% a.m.

Para obtermos a taxa trimestral equivalente a taxa efetiva de 2,75 a.m. usamos a expressão a seguir:

$(1 + i_t) = (1 + i_m)^3$

$(1 + i_t) = (1 + 0{,}0275)^3$

$(1 + i_t) = (1{,}0275)^3$

$(1 + i_t) = 1{,}0847894$

$i_t = 1{,}0847894 - 1$

$i_t = 0{,}0847894$

$\mathbf{i_t = 8{,}47\%}$ **a.t.**

03) Exemplo: Quanto se terá daqui a três anos , ao se aplicar R$ 2.500,00 a taxa de 27% ao ano com capitalização trimestral ?

* Resolução: Do problema tiramos os dados: $P = 2.500{,}00$

$n =$ anos

$i_N = 27\%$ a.a.

$S = ?$

A taxa de 27% a.a. é uma taxa nominal. Devemos obter a taxa efetiva da nominal de acordo com o período de capitalização (trimestral) e, em seguida, calcular a taxa anual equivalente a taxa efetiva decorrente da nominal.

A taxa efetiva trimestral é 6,75% a.t. , pois: 27 : 4 = 6,75.

A taxa anual equivalente a taxa efetiva trimestral de 6,75% é dada pela expressão:

$(1 + i_a) = (1 + I_t)^4$

$(1 + i_a) = (1 + 0{,}0675)^4$	$S = P.(1 + i)^n$
$(1 + i_a) = (1{,}0675)^4$	$S = 2.500.(1 + 0{,}2985883)^3$
$(1 + i_a) = 1{,}2985883$	$S = 2.500.(1{,}2985883)^3$
$ia = 1{,}2985883 - 1$	$S = 2.500.(2{,}189850450)$
$i_a = 0{,}2985883$	$\mathbf{S = 5.474{,}62}$
$\mathbf{i_a = 29{,}85\%}$ **a.a.**	

* Resposta: Daqui a três anos se terá R$ 5.474,62 .

PROBLEMAS PROPOSTOS

01) Determinar as taxas mensal e diária que são proporcionais a taxa de 20% ao trimestre.

02) Calcule as taxas trimestral e anual que são proporcionais a taxa de 3% ao mês.

03) Encontrar as efetivas anuais que são equivalentes as taxas de 4% ao mês e 6% ao semestre.

04) Determinar a taxa efetiva anual que é equivalente a taxa de 48% a.a. capitalizados trimestralmente.

05) Determinar as taxas efetivas trimestral e anual que são equivalentes a taxa de 60% ao ano, capitalizados mensalmente.

06) Determinar a taxa efetiva trimestral que é equivalente a uma taxa efetiva de 202% ao ano.

07) Encontrar a taxa efetiva mensal que é equivalente a taxa de 26% a.a. capitalizados trimestralmente.

08) Uma aplicação de R$ 5.700,00 a taxa de 5% a.m. capitalizados trimestralmente é retirada após 2 anos. Qual o montante acumulado ?

09) Um capital de R$ 7.600,00 é aplicado a taxa nominal de 36% a.a., capitalizado semestralmente. Qual o montante ao final de 3 anos ?

10) Qual o montante acumulado no final de 3 anos ao se aplicar um capital de R$ 9.560,00 a taxa de 7% a.t. a juros compostos ?

11) Um capital de R$ 11.200,00 é aplicado a taxa de 4% a.m. sendo capitalizado trimestralmente. Qual o montante retirado ao findar 4 anos ?

12) Quanto se terá daqui a 2 anos ao se aplicar R$ 3.400,00 a taxa de 24% a.a. com capitalização semestral ?

13) Uma aplicação de R$ 13.100,00 é feita a taxa de 36% a.a., com capitalização semestral. Qual o montante ao final de 3,5 anos ?

14) Um capital de R$ 10.360,00 é aplicado a taxa nominal de 48% a.a. com capitalização trimestral. Qual o valor acumulado ao fim de 2,5 anos ?

15) Um capital é aplicado a taxa de 1,17% a.m. Calcular:
a) a taxa bimestral equivalente.
b) a taxa trimestral equivalente.
c) a taxa semestral equivalente.
d) a taxa anual equivalente.

19) Uma aplicação de R$ 5.400,00 feita a taxa de 5% a.m. tem capitalização semestral durante 2 anos. Qual o montante ao final dos 2 anos ?

20) Um capital de R$ 8.900,00; a uma taxa nominal de 30% a.a. com capitalização trimestral é aplicado durante 4 anos. Qual o montante ao fim de 4 anos ?

21) Certa grandeza cresce, mensalmente, com taxa nominal de 2% a.a. Determinar:
a) sua taxa efetiva trimestral.
b) sua taxa semestral equivalente.

22) Se a população do Brasil continuar crescendo a taxa de 2% a.a. , qual seu crescimento na próxima década ?

23) Uma aplicação duplica de valor ao final de 2 anos. Determinar:
a) a taxa mensal proporcional.
b) a taxa mensal equivalente.

24) Certo capital rende 50% de sua aplicação quando retirado após 1,5 anos. Determinar;
a) a taxa trimestral proporcional.
b) a taxa trimestral equivalente.

25) Uma aplicação triplica de valor ao final de 3 anos. Calcular:
a) a taxa trimestral equivalente.
b) a taxa semestral equivalente.

26) Uma aplicação rende 80% do valor inicial quando retirada após 2,5 anos. Calcular:
a) a taxa semestral proporcional.
b) a taxa semestral equivalente.

27) Após 4 anos de uma aplicação, verificou-se que os juros totais equivalem a 3/4 dessa aplicação. Encontrar;
a) a taxa mensal proporcional.
b) a taxa trimestral equivalente.

28) Os rendimentos totais de um capital aplicado durante 5 meses equivalem a 5/7 de sua aplicação. Calcular:
a) a taxa anual proporcional.
b) a taxa anual equivalente.

29) Após 4 meses de capitalização, verificou-se que o montante retirado no final equivale a 7/4 dessa aplicação. Determinar;
a) a taxa trimestral proporcional
b) a taxa trimestral equivalente.

30)Ao findar os 6 meses de aplicação, viu-se que o montante retirado corresponde a 8/5 do valor aplicado. Determinar:
a) a taxa efetiva mensal.
b) a taxa anual equivalente.

10. PROBLEMAS DO 1° GRAU

A resolução de certos problemas apresenta, às vezes, facilidades quando repassamos para a linguagem simbólica o enunciado do problema. Com isso, estamos expressando o problema em linguagem matemática representando-o por uma sentença chamada Equação do 1° Grau.

Então, um problema se diz do 1° grau quando a sua resolução nos conduz à uma equação do 1° grau. Para tanto, apresentaremos a seguir a resolução de alguns problemas em três categorias:

1. Problemas com Números Naturais - Cálculo de um Número Procurado;
2. Problemas com Dados Fracionários;
3. Problemas com duas variáveis.

Na resolução de um problema sempre devemos observar as seguintes fases:

1°) expressar o problema em linguagem simbólica (equação):
2°) resolver a equação;
3°) verificar e interpretar os resultados encontrados na resolução.

1. Problemas com Números Naturais - Cálculo de um Número Procurado

1) Exemplo: A soma de dois números é 375. Sendo a diferença entre eles 39, quais são esses números ?

Resolução: 1° número → **x**
2° número → **(x - 39)**

Sentença:
$$x + (x - 39) = 375$$
$$x + x - 39 = 375$$
$$2x = 375 + 39$$
$$2x = 414$$
$$x = 207$$

Diferença:
$$(x) - (x - 39) = 39$$
$$x - x + 39 = 39$$
$$39 = 39$$

Cálculos auxiliares: 1° número → **x = 207**
2° número → (**x - 39) = (207 - 39) = 168**

Resposta: Os números procurados são: 168 e 207 .

2) Exemplo: A diferença entre o quadrado de dois números consecutivos é 15. Quais são esses números ?

Resolução: 1° número → **x**
2° número → **x + 1**

Sentença:
$$(x + 1)^2 - (x)^2 = 15$$
$$(x + 1).(x + 1) - x^2 = 15$$
$$x^2 + x + x + 1 - x^2 = 15$$
$$x^2 - x^2 + 2x + 1 = 15$$
$$2x + 1 = 15$$
$$2x = 15 - 1$$
$$2x = 14$$
$$x = 14 / 2$$
$$x = 7$$

Cálculos auxiliares: 1° número → **x = 7**
2° número → **x + 1 = 7 + 1 = 8**

Diferença entre os quadrados:
$$(8)^2 - (7)^2 = 15$$
$$64 - 49 = 15$$
$$15 = 15$$

Resposta: Os números procurados são: 7 e 8 .

3) Exemplo: Um pai tem 30 anos e seu filho 6. Daqui a quantos anos o pai terá o dobro da idade do filho ?

Resolução: Número procurado → x
Daqui a "x " anos, teremos:
- Idade do pai → 30 + x
- Idade do filho → 6 + x

Sentença:
$$(30 + x) = 2.(6 + x)$$
$$30 + x = 12 + 2x$$
$$30 - 12 = 2x - x$$
$$18 = x$$
$$x = 18$$

Cálculos auxiliares: - Idade do pai → 30 + x = 30 + 18 = 48
- Idade do filho → 6 + x = 6 + 18 = 24

Veja que a idade do pai é o dobro da idade do filho.

Resposta: Daqui a 18 anos.

4) Exemplo: Na conta do armazém, comprei igual número de Kg de arroz e de feijão, mas os gastos com arroz atingiram R$ 180,00 e os gastos com feijão R$ 120,00. Sabendo-se que 1 Kg de arroz e 1 Kg de feijão custam R$ 10,00 ; determine o preço do Kg de cada espécie.

Resolução: preço do arroz - **a**
preço do feijão - **b** $\rightarrow$ $a + b = 10$
quilos de cada espécie **- x**

x quilos de arroz (a) custam R$ 180,00 $\rightarrow$ $x.a = 180$
x quilos de feijão (b) custam R$ 120,00 $\rightarrow$ $\underline{x.b = 120}$

$$x.a + x.b = 180 + 120$$
$$x.(a + b) = 300$$
$$x.10 = 300$$
$$x = 300 / 10$$
$$x = 30$$

Comprei 30 quilos de arroz que custam R$ 180,00 ;
Comprei 30 quilos de feijão que custam R$ 120,00.
Logo:
O quilo de arroz vale: 180 / 30 = R$ 6,00
O quilo de feijão vale: 120 / 30 = R$ 4,00

Resposta: O quilo do arroz custa R$ 6,00 e do feijão custa R$ 4,00 .

5) Exemplo: Dei três laranjas a cada menino e fiquei com 20. Se tivesse dado cinco laranjas a cada menino teria ficado com 8 laranjas. Quantos meninos eram ? Quantas laranjas eu tinha ?

Resolução: Número de laranjas - **y**
Número de meninos - **x**

Na 1° situação temos: $y = 3x + 20$
Na 2° situação temos: $y = 5x + 8$

Como o número de laranjas é o mesmo em cada situação, temos:

$$5x + 8 = 3x + 20$$
$$5x - 3x = 20 - 8$$
$$2x = 12$$
$$x = 12 / 2$$
$$x = 6$$

Cálculos auxiliares: Número de meninos $\rightarrow$ $x = 6$
Número de laranjas $\rightarrow$ $3x + 20 = 3.(6) + 20 = 38$
$5x + 8 = 5.(6) + 8 = 38$

Resposta: Eram 6 meninos e eu tinha 38 laranjas.

6) Exemplo: Comprei 60 cadernos por certa quantia. Se cada caderno tivesse custado R$ 0,60 a menos, teria levado mais 15 cadernos. Qual o preço de cada caderno ?

Resolução: Preço do caderno - x
Número de cadernos - 60

Temos duas situações: Antes $\rightarrow$ 60 . x
Depois $\rightarrow$ (x - 0,6) . (60 + 15)

Como o valor da compra é o mesmo em cada situação , temos a seguinte:

Sentença: $(x - 0{,}60).75 = 60.x$

$$75.x - 45 = 60.x$$
$$75.x - 60.x = 45$$
$$15.x = 45$$
$$x = 45 / 15$$
$$x = 3$$

Resposta: O preço do caderno é R$ 3,00.

7) Exemplo: Comprei 40 lapiseiras por R$ 1.200,00. Por quanto devo vender cada uma para lucrar em 5 delas o preço de venda de uma ?

Resolução:

Se 40 lapiseiras custam R$ 1.200,00 ; uma lapiseira custa:

1 lapiseira = 1.200 / 40
1 lapiseira = R$ 30,00 $\rightarrow$ preço de venda de uma lapiseira.

O preço de 5 lapiseiras é: 5 x R$ 30,00 = R$ 150,00.

Mas eu quero lucrar (150 + 30) em 5 lapiseiras, ou seja:

5 lapiseiras deverão custar: R$ (150 + 30) = R$ 180,00

Logo:

Uma lapiseira deverá ser vendida por: 1 lapiseira = 180 / 5
1 lapiseira = R$ 36,00

Resposta: Devo vender uma lapiseira por R$ 36,00.

8) Exemplo: São galhos e pássaros. Se dois pássaros ficam em cada galho, 26 pássaros ficam sem galho. Se três pássaros ficam em cada galho, dois galhos ficam sem pássaros. Quantos são os pássaros ? Quantos são os galhos ?

Resolução: Fazendo x igual ao número de pássaros, temos:

1° Situação: $\dfrac{x - 26}{2} \rightarrow$ número de galhos.

2° Situação: $\dfrac{x + 6}{3} \rightarrow$ número de galhos.

Igualando as situações, temos a seguinte Sentença: : $\dfrac{x - 26}{2} = \dfrac{x + 6}{3}$

$$3.(x - 26) = 2.(x + 6)$$
$$3x - 78 = 2x + 12$$
$$3x - 2x = 12 + 78$$
$$x = 90$$

Cálculos auxiliares: Número de pássaros $\rightarrow x = 90$
Número de galhos $\rightarrow (x - 26) / 2 = (90 - 26) / 2 = 32$
$\rightarrow (x + 6) / 3 = (90 + 6) / 3 = 32$

Resposta: São 90 pássaros e 32 galhos.

2. Problemas com Dados Fracionários.

1) Exemplo: Do salário que recebo aplico 1/5 em poupança todo mês. Se meu salário custa R$ 200,00 quanto coloco em poupança ?

Resolução:

Coloco na poupança 1/5 do meu salário de R$ 200,00
Coloco na poupança 1/5 de 200
Sendo 1/5 de 200 = 1/5 x 200 = 200 / 5 = 40
Logo:
Aplico na poupança R$ 40,00

Resposta: Coloco na poupança R$ 40,00 por mês.

2) Exemplo: No tanque do meu carro cabem 40 litros de gasolina. Numa viagem gastei ¾ da gasolina. Quanto restou ainda no tanque ?

Resolução: Os 40 litros correspondem a fração 4/4

Se gastou ¾, logo restou apenas ¼ no tanque, pois:

$$4/4 - 3/4 = \frac{4 - 3}{4} = \frac{1}{4}$$

Para sabermos ¼ de 40, fazemos: ¼ de 40 = ¼ x 40 = 40 / 4 = 10

Logo:

Ainda restam 10 litros de gasolina no tanque.

Resposta: Restou 10 litros de gasolina.

3) Exemplo: Uma piscina tem 200 metros de comprimento. Karine nadou 1/5 da piscina. Roberto nadou ¼ de Karine. Quantos metros nadaram juntos ?

Resolução:

Se Karine nadou 1/5 da piscina, nadou 1/5 de 200 → comprimento da piscina
Logo, Karine nadou: 1/5 de 200 = 1/5 x 200 = 200 / 5 = 40

Se Roberto nadou ¼ de Karine, nadou ¼ de 40 → parte que Karine nadou
Logo, Roberto nadou: ¼ de 40 = ¼ x 400 = 40 / 4 = 10

Então, nadaram juntos: 40 metros + 10 metros = 50 metros

Resposta: Karine e Roberto nadaram juntos 50 metros.

4) Exemplo: Contrato 3 operários para um serviço. O 1° faz o serviço em 10 dias. O 2° faz em 15 dias e o 3° o faz em 12 dias. Em quantos dias o serviço seria feito pelos três juntos ?
Resolução:

- Se o 1° faz o serviço em 10 dias, em 1 dia ele fará 1/10 do serviço;
- Se o 1° faz o serviço em 15 dias, em 1 dia ele fará 1/15 do serviço;
- Se o 1° faz o serviço em 12 dias, em 1 dia ele fará 1/12 do serviço.

Os três juntos, em 1 dia, farão: 1/10 + 1/12 + 1/15 do serviço, que corresponde a 15/60 de todo o serviço, pois:

Juntos: $1/10 + 1/12 + 1/15 = \frac{6 + 5 + 4}{60} = \frac{15}{60}$

Então: se em 1 dia .... 15/60 do serviço
x dia .... 60/60 do serviço (todo o serviço)

Logo: $x \cdot 15/60 = 60/60 \cdot 1$
$x = 60/60 : 15/60$
$x = 60/60 \times 60/15$
$x = 60 / 15$
$x = 4$

Resposta: Terminaram o serviço juntos em 4 dias.

5) Exemplo: Um tanque é cheio por duas torneiras: a 1° enche-o em3 horas, a 2° enche em 5 horas. Havendo ainda um sifão que o esvazia em 10 horas, em quanto tempo o tanque ficaria cheio se abríssemos as torneiras e o sifão ?
Resolução:

- Se a 1° torneira enche o tanque em 3 horas, em 1 hora encherá 1/3 do tanque;
- Se a 2° torneira enche o tanque em 5 horas, em 1 hora encherá 1/5 do tanque.
- Se o sifão esvazia o tanque em 10 horas, em 1 horas esvaziará 1/10 do tanque.

Se os três juntos ficarem abertos, vemos as torneiras enchem o tanque mais rápidas do que o sifão possa esvaziar. Essa diferença é dada pela seguinte:

Sentença: $(1/3 + 1/5) - 1/10 = \frac{10 + 6 - 3}{30} = \frac{16 - 3}{30} = \frac{13}{30}$

Em 1 hora as torneiras enchem 13/30 do tanque. Logo:

1 hora 13/30
x horas .... 30/30 $\rightarrow$ fração que corresponde todo o tanque.

$x \cdot 13/30 = 30/30 \cdot 1$
$x = 30/30 : 13/30$
$x = 30/13 \rightarrow x = 2{,}30$ ou $x = 2h18min$.

Resposta: O tanque ficará cheio em 2h 18min.

6) Exemplo: O lucro de uma firma foi repartido entre seus três sócios de forma que ao 1° sócio coube 1/3 ; ao 2° sócio coube ¼ e o terceiro ficou R$ 12.600,00 . Qual o lucro da firma e quantia de cada sócio ?

Resolução: Cada sócio tem a seguinte quantia: 1° sócio - 1/3 do lucro
2° sócio - ¼ do lucro
3° sócio - R$ 12.600,00 de lucro.

Devemos achar a fração correspondente a quantia do 3° sócio para calcularmos as partes restantes.

O lucro dos dois primeiros sócios também é uma fração do lucro total repartido. Então:

$1/3 + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = 7/12 \rightarrow$ fração correspondente ao lucro dos dois 1° sócios.

A fração de lucro do terceiro sócio é dada por: 12/12 - 7/12 = 5/12

Se a fração 5/12 corresponde a parcela de lucro de R$ 12.600,00 ; então:

5/12 → R$ 12.600,00
1/12 → R$ 12.600 : 5 = R$ 2.520,00
12/12 → R$ 2.520,00 x 12 = R$ 30.240,00 → Lucro total.
↑
fração que corresponde ao lucro total.

Cálculos auxiliares: 1° sócio - 1/3 de 30.240,00 = 30.240 / 3 = R$ 10.080,00
2° sócio - 1/4 de 30.240,00 = 30.240 / 4 = R$ 7.560,00
1° sócio - Lucro de .... R$ 12.600,00
Lucro Total .... R$ 30.240,00

Resposta: O lucro total é de R$ 30.240,00 e o lucro de cada sócio é:
1° sócio - R$ 10.080,00
2° sócio - R$ 7.560,00
3° sócio - R$ 12.600,00

7) Exemplo: Uma herança foi assim repartida: 1/3 ao primeiro herdeiro; os 2/3 do primeiro ao segundo herdeiro; e ao terceiro herdeiro ¼ do que os dois primeiros receberam, enquanto que as despesas absorveram o resto. Sendo de R$ 180.000,00 o valor da herança, determine: a) a herança de cada um. b) o valor das despesas.

a) Resolução: Cada herdeiro recebeu uma fração da herança da seguinte forma:

1° herdeiro → 1/3 da herança.
2° herdeiro → 2/3 de 1/3 = 2/3 x 1/3 = 2/9 da herança.
3° herdeiro → ¼ de (1/3 + 2/9) = ¼ x (1/3 + 2/9) = 5/36

Logo, a herança de cada pessoa é:

1° herdeiro → 1/3 de 180.000 = 1/3 x 180.000 = 180.000 / 3 = 60.000,00
2° herdeiro → 2/9 de 180.000 = 2/9 x 180.000 = 2 x 180.000 / 9 = 40.000,00
3° herdeiro → ¼ de 180.000 = ¼ x 180.000 = 180.000 / 4 = 45.000,00
Parte dos Herdeiros **145.000,00**

b) O valor das despesas é dado tirando-se da herança a parte dos herdeiros. Assim:

Herança = Parte dos herdeiros - Despesas
Despesas = Herança - Parte dos herdeiros
Despesas = 180.000 - 145.000
Despesas = 35.000

Respostas: a) A herança de cada um é: 1° herdeiro → R$ 60.000,00
2° herdeiro → R$ 40.000,00
3° herdeiro → R$ 45.000,00

b) O valor das despesas é: R$ 35.000,00

8) Exemplo: Certo número de moedas foram divididas entre três pessoas. A 1° pessoa recebeu 2/5 das moedas mais 8 moedas; a 2° pessoa recebeu 3/7 mais 7 moedas e a 3° pessoa ficou com as 9 moedas restantes. Determine:
a) quantas moedas foram repartidas.
b) quantas moedas têm a 1° e a 2° pessoa.

a) Resolução: Cada pessoa tem em moedas: 1° pessoa → 2/5 + 8
2° pessoa → 3/7 + 7
3° pessoa → 9 moedas
Somando-se as quantidades de cada pessoa, temos:

2/5 + 8 + 3/7 + 7 + 9 = a/b
2/5 + 3/7 + 8 + 9 = a/b
29/35 + 24 = a/b → fração que representa o total de moedas.

Já podemos perceber que a fração que representa o total de moedas é: a/b = 35/35.
Assim, temos que:
29/35 + 24 → 35/35

Vemos também que a diferença entre 35/35 - 29/35 corresponde ao número de moedas já distribuídas que é de 24 moedas.
Logo, temos que:
29/35 + 24 → 35/35
24 → 35/35 - 29/35
24 → 6/35
Se a fração 6/35 corresponde as 24 moedas já repartidas, então:
6/35 → 24
1/35 → 24 : 6 = 4
35/35 → 4 x 35 = 140
Do total de 140 moedas, cada pessoa recebeu: 1° pessoa → 2/5 + 8 = 56 + 8 = 64
2° pessoa → 3/7 + 7 = 60 + 7 = 67

Respostas: a) foram repartidas 140 moedas.
b) 1° pessoa → 64 moedas
2° pessoa → 67 moedas

3. Problemas com Duas Variáveis.

a) **Sistemas:**

Os problemas do 1° grau com duas variáveis nos levam sempre a resolver um sistema de duas equações com duas variáveis. Para tanto, vamos exemplificar alguns métodos de resolução de sistemas de equações. Apresentaremos dois métodos: O Método da Adição e o da Substituição.

a.1 - Método da Adição: Consiste em somar as duas equações obtidas para eliminar uma variável.

*** Exemplo:** Resolver o sistema: $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Resolução: Soma-se as equações da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} x + y = 10 \\ \underline{x - y = 2} \\ 2x \;/\; = 12 \\ x = 12/2 \\ x = 6 \end{array} \; +$$

Substitui-se o valor de x em qualquer das outras equações anteriores para achar o valor de y. Vejamos:

$$\begin{array}{rcl} x + y &=& 10 \\ 6 + y &=& 10 \\ y &=& 10 - 6 \\ y &=& 4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} x - y &=& 2 \\ 6 - y &=& 2 \\ 6 - 2 &=& y \\ 4 &=& y \end{array}$$

Resposta: $x = 6$ e $y = 4$.

a.2 - Método da Substituição: Consiste em substituir o valor da variável de uma equação na outra equação.

*** Exemplo:** Resolver o sistema: $\begin{cases} x + y = 11 \\ 2x + 3y = 26 \end{cases}$

Resolução: Toma-se uma das equações e isola-se o valor de uma das variáveis:

$x + y = 11 \rightarrow$ escolheu-se a 1° equação.
$x = 11 - y \rightarrow$ isolou-se o valor de x
Substitui-se esse valor de x que é 11 - y na outra equação: $2x + 3y = 26$

$$\begin{array}{l} 2.(11 - y) + 3y = 26 \\ 22 - 2y + 3y = 26 \\ y = 26 - 22 \end{array}$$

Valor de y $\rightarrow$ $y = 4$

Achando-se o valor de y, substitui-se-o em qualquer das equações anteriores.

$x + y = 11$	$2x + 3y = 26$
$x + 4 = 11$	$2x + 3.(4) = 26$
$x = 11 - 4$	$2x = 26 - 12$
$x = 7$	$2x = 14$
	$x = 14 / 2$
	$x = 7$

Resposta: $x = 7$ e $y = 4$.

b) **Situações - Problemas:**

Nesse caso, a interpretação de um problema nos leva a obter um sistema de equação que é a linguagem simbólica do enunciado. Transformada a situação num sistema, basta resolvê-lo e verificar os resultados obtidos.

1) Exemplo: A soma de dois números vale 14. A diferença entre eles vale 2. Quais são esses números ?

Resolução: 1° número $\rightarrow$ x
2° número $\rightarrow$ y
Sentença: a soma dos números vale: 14 $\rightarrow x + y = 14$
a diferença vale: 2 $\rightarrow x - y = 2$

Logo, temos o sistema: $\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} x + y = 14 \\ \underline{x - y = 2} \\ 2x \;/\; = 16 \end{array}$

$x = 16 / 2$

Valor de x $\rightarrow$ $x = 8$

Substituindo-se o valor de x em qualquer das equações anteriores, temos o valor de y.

$x + y = 14$	$x - y = 2$
$8 + y = 14$	$8 - y = 2$
$y = 14 - 8$	$8 - 2 = y$
$y = 6$	$6 = y$

Resposta: Os números procurados são 8 e 6.

2) Exemplo: Um aluno ganha R$ 15,00 por problema que acerta e paga, a título de multa, R$ 9,00 por problema que erra. Fez 20 problemas e recebeu R$ 204,00. Quantos problemas acertou e quantos errou ?

Resolução: De acordo com a questão, queremos:
Número de problemas que acertou $\rightarrow$ x
Número de problemas que errou $\rightarrow$ y

- Se ganha R$ 15,00 por problemas certos, então ganharia 15.x se acertasse todos.

- Se perde R$ 9,00 por problemas errados, então perderia 9.y se errasse todos.

- Se resolveu 20 questões, então resolveu x + y questões (dentre certas e erradas).
  Logo: $x + y = 20$

- Se ganhou R$ 204,00 foi o saldo entre 15.x - 9.y.
  Logo: $15x - 9y = 204$

- Resolvendo o sistema: $\begin{cases} x + y = 20 \\ 15x - 9y = 204 \end{cases}$, encontramos x e y.

$x + y = 20$
$x = 20 - y$

$15.x - 9.y = 204$
$15.(20 - y)\ 9y = 204$
$300 - 15y - 9y = 204$
$-24y = 204 - 300\ .\ (-1)$
$24y = 96$
$y = 96 / 24$
$y = 4$

$x + y = 20$
$x = 20 - y$
$x = 20 - 4$
$x = 16$

Resposta: Acertou 16 questões e errou 4 questões.

3) Exemplo: Duas torneiras são abertas para encher um tanque de 2.600 litros. A primeira torneira despeja 35 litros por minuto e a segunda despeja 40 litros por minuto. Por quanto tempo cada torneira deve ficar aberta para encher o tanque em 70 minutos ?

Resolução: De acordo com o problema, queremos:
Tempo da primeira torneira $\rightarrow$ x
Tempo da segunda torneira $\rightarrow$ y

- Se a 1° torneira enchesse sozinha, despejaria 35.x litros;
- Se a 1° torneira enchesse sozinha, despejaria 40y litros.
- Sendo as duas juntas, temos 2.600 litros. Logo: $35x + 40y = 2.600$
- Se as duas devem encher o tanque em 70 minutos, então: $x + y = 70 \rightarrow$ tempo das duas torneiras.

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} x + y = 70 \\ 35x + 40y = 2.600 \end{cases}$, teremos o valor de x e y.

$x + y + 70$
$x = 70 - y$

$35x + 40y = 2.600$
$35.(70 - y) + 40y = 2.600$
$2.450 - 35y + 40y = 2.600$
$5y = 150$
$y = 150 / 5$
$y = 30$

$x + y = 70$
$x = 70 - y$
$x = 70 - 30$
$x = 40$

Resposta: A 1° torneira deve ficar aberta por 40 min e a 2° por 30 min.

4) Exemplo: Uma pessoa vendeu ingressos a R$ 8,00 para homens e a R$ 6,00 para mulher, apurando R$ 740,00. Se vendesse o ingresso a R$ 6,00 para homens e a R$ 8,00 para mulher teria lucrado R$ 60,00 mais. Quantos ingressos vendeu ?

Resolução: De acordo com o problema, queremos:

número de ingressos de homens → x
número de ingressos de mulher → y
total de ingressos vendidos → x + y

No 1° caso:
- Se vendesse ingressos somente para homens, teria apurado: 8.x ;
- Se vendesse ingressos somente para mulheres, teria apurado: 6.y ;
- Como vendeu ingressos para homens e mulheres, apurou R$ 740,00 ; ou seja:

$8x + 6y = 740{,}00 \rightarrow$ ingressos para homem + ingressos para mulher

No 2° caso:
- Se o ingresso para homem fosse a R$ 6,00 teria apurado: 6.x;
- Se o ingressos para mulher fosse a R$ 8,00 teria apurado: 8.y;
- Se invertesse os preços, teria apurado R$ 60,00 a mais, ou seja: 740 + 60 = 800 ; ou seja:

$6x + 8y = 800 \rightarrow$ ingressos para homem + ingressos para mulher

Basta agora resolver o sistema: $\begin{cases} 8x + 6y = 740 \\ 6x + 8y = 800 \end{cases}$

Da 1° equação, temos: $8x + 6y = 740$

$$8x = 740 - 6y$$
$$x = \frac{740 - 6y}{8}$$

Substituindo-se na 2° equação, temos: $6x + 8y = 800$

$$\frac{6.(740 - 6y)}{8} + 8y = 800$$
$$\frac{6.(740 - 6y)}{8} = 800 - 8y$$
$$6.(740 - 6y) = 8.(800 - 8y)$$
$$4.440 - 36y = 6.400 - 64y$$
$$64.y - 36.y = 6.400 - 4.440$$
$$28.y = 1.960$$
$$y = 1.960 / 28$$
$$y = 70$$

Substitui-se o valor de **y** na expressão anterior para encontrar o valor de **x**:

$$x = \frac{740 - 6y}{8} = \frac{740 - 6.(70)}{8} = \frac{740 - 420}{8} = \frac{320}{8} = 40$$

Sendo o número total de ingressos vendidos dado por x + y, temos: 40 + 70 = **110**

Resposta: Vendeu 110 ingressos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Comprei laranjas; deram-se 5 a mais em cada 2 dúzias, tendo eu recebido 319 laranjas. Quantas dúzias tinha eu comprado ?

2. Comprei 25Kg de arroz a R$ 6,00 . Depois de alguns dias, comprei 10Kg de arroz e 8Kg de feijão, tendo gasto R$ 50,00 menos. Qual é o preço de 1Kg de feijão ?

3. Comprei 50 vidros de tinta por certa quantia. Se cada vidro tivesse custado R$ 0,50 menos; poderia ter levado mais 10 vidros. Qual o preço do vidro de tinta ?

4. Joaquim adquiriu 30 livros; se cada um tivesse custado mais R$ 5,00 teria levado 6 livros a menos. Qual o preço do livro ?

5. Quando adicionamos 2 aos termos de uma fração ela se torna equivalente a 5/6 . Quando subtraímos 2 aos dois termos da fração ela se torna equivalente a l/2. Determine esta fração.

6. Calcular a fração equivalente a 21/35 cuja soma dos termos seja 88.

7. Para uma festa foram vendidos 100 ingressos. O preço do ingresso é de R$ 200,00 para rapazes e R$ 100,00 para moças. Sabendo-se que foram arrecadados R$ 14.000,00 ; quantos rapazes e quantas moças foram a festa ?

8. salário de Antônio é igual a 90% do salário de Pedro. A diferença entre os salários é de R$ 500,00. Qual é o salário de cada um ?

9. Numa garagem entre carros e motos há 23 veículos. O número total de rodas é de 74. Supondo-se que cada moto possa transportar duas pessoas e cada carro 5 pessoas, qual é o número de pessoas que esses veículos poderão transportar ?

10. Um pecuarista adquiriu bois a R$ 800,00 e vacas a R$ 600,00 pagando ao todo R$ 74.000,00. Se tivesse comprado vacas a R$ 800,00 e bois a R$ 600,00 teria gasto R$ 6.000,00 mais. Quantos bois e quantas vacas comprou ?

11. Sendo que em 1 dia de trabalho 2 homens produzem quanto 6 mulheres, e que 3 mulheres produzem quanto 8 meninos, calcular quantos meninos seriam necessários para fazer o trabalho diário de 13 homens.

12. Um comerciante comprou 40 garrafas de vinho por R$ 800,00. Por quanto deve vender cada garrafa para lucrar, em 10 delas, quantia equivalente ao custo de 2 garrafas ?

13. Comprei 50 lapiseiras por R$ 1.000,00 . Por quanto devo vender cada uma para lucrar, em 5 delas, o preço de venda de uma ?

14. A diferença entre o quadrado de dois números consecutivos é 55. Quais são esses números ?

15. Uma carga deve ser transportada em animais. Se colocar 2 sacos em cada animal, sobram 4 sacos. Se colocar 4 sacos em cada animal sobram 3 animais sem carregar sacos. Quantos são os animais e quantos são os sacos ?

16. Uma senhora foi a feira e pagou em frutas 2/9 do que tinha na bolsa. Gastou depois 3/7 do restante em verduras e ainda lhes sobraram R$ 800,00. Que importância levava ao sair de casa ?

17. Um vendedor compra uma caixa de maçã com 200 maçãs a R$ 150,00 cada uma. Entretanto, quando abre a caixa, encontra 5 inutilizadas. Desejando ganhar R$ 9.000,00 ; por quanto deve vender cada maçã ?

18. Uma pessoa retira do banco 3/7 da quantia depositada. Alguns dias depois deposita R$ 600.000,00 e fica com o dobro do depósito primitivo. Calcular a importância retirada.

19. Um avô tem 74 anos e seus netos 5, 7, 11 e 12 anos. No fim de quantos anos a idade do avô será igual à soma das idades dos netos ?

20. Titio ficou 1/3 de sua vida solteiro, 2/5 casado e ainda viveu mais 20 anos viúvo. Com que idade faleceu ?

21. No pomar de uma chácara, 2/5 das árvores são limoeiros, 1/3 são jaboticabeiras, 1/10 são mangueiras e há 220 laranjeiras. Determinar o número de árvores das demais espécies.

22. Um tanque contém 2/9 de sua capacidade de água; se se despejar mais 800 litros, ele ficará com os 6/7 cheios. Determinar a capacidade do tanque.

23. Certa pessoa deixou 4/5 de seus haveres para os parentes, 1/9 a um orfanato, 1/15 a um asilo e R$ 100.000,00 para esmolas. Determinar quanto deixou para os parentes, o orfanato e o asilo.

24. Para A, certo corretor vendeu ¼ de um terreno; para B vendeu 2/5 do que sobrara e para C vendeu 1/3 do resto, ficando ainda com 165 metros quadrados do terreno. Qual era a área do terreno e quantos metros foram vendidos de cada vez ?

25. Numa pipa há duas torneiras alimentadoras: a 1° enche-a em 9 horas e a 2° enche-a em 6 horas. Há também um sifão que a esvazia em 12 horas. Funcionando conjuntamente as torneiras e o sifão, em quanto tempo a pipa se encherá ?

26. Meu dinheiro só dá para pagar 7/8 do objeto que desejo comprar, porém, se o vendedor me conceder o abatimento de 3/20, sobrar-me-ão R$ 4,00. Quanto tenho e quanto custa o objeto ?

27. Os 3/5 de 2/9 do preço de uma casa equivalem a ¼ dos 8/27 do preço de uma chácara, avaliada em R$ 81.000,00. Qual é o preço da casa ?

28. Uma peça de tecido foi comprada à razão de R$ 257,00 o metro. Esse tecido, depois de molhado, encolheu 4/13 do seu comprimento e, em conseqüência, passou a valer R$ 9.483,30 apenas. Calcular o comprimento primitivo e o preço por que foi comprada a peça.

11. TÓPICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

01) EQUIVALÊNCIA FINANCEIRA:

O **princípio de equivalência financeira** considera a equivalência em valores dos fluxos tomados a uma mesma data. Esta equivalência não precisa, obrigatoriamente, ser verificado na data-zero. Ela pode ser realizada em qualquer data **n** desde que seja a mesma para todos os fluxos.

Este princípio nos dá a idéia de associar o valor do dinheiro no tempo. Como esse valor é mutável com o passar do tempo, pode-se dizer que R$ 100,00 "hoje" não é o mesmo que R$ 100,00 "amanhã". Ocorre sobre os R$ 100,00 hoje um processo de atualização financeira sobre este fluxo (valor), em função do tempo e associados a uma taxa de juros, que os tornam distintos em termos absolutos, mas que os fazem equivalentes no futuro em termos reais.

O princípio de equivalência financeira é a base de todo o estudo envolvendo Matemática Financeira com vista a análise de investimentos.

Vejamos os Exemplos numéricos para esclarecerem o que foi enunciado.

1) Exemplo: Qual o equivalente financeiro de R$ 1.500,00 ; daqui a 4 meses quando aplicado a uma taxa de atualização de 15% a.m. ?

*** Resolução:**

No final do 1º mês, teremos: 1.500 + 1.500 x 0,15 = 1.725,00
No final do 2º mês, teremos: 1.725 + 1.725 x 0,15 = 1.983,75
No final do 3º mês, teremos: 1.983,75 + 1.983,75 x 0,15 = 2.281,31
No final do 4º mês, teremos: 2.281,31 + 2.281,31 x 0,15 = 2.623,50

De acordo com o princípio de equivalência financeira, os R$ 1.500,00 **hoje** equivalem aos R$ 2.623,50 daqui a 4 meses atualizados a taxa de 15% a.m.

2) Exemplo: Emprestando R$ 1.000,00 para ser pago em 5 parcelas, quanto se recebe no final do pagamento das parcelas com juros de 10% no período ?

*** Resolução:** A expressão do montante resolve o problema.

Do problema temos os dados: P = 1.000,00 (principal)
n = 5 (prazos do pagamento)
i = 10% = 0,10 (taxa no período)
S = ?

Substituindo os dados na expressão do montante, temos:

$$S = P.(1 + i)^n$$
$$S = 1.000.(1 + 0,10)^5$$
$$S = 1.000.(1,10)^5$$
$$S = 1.000.(1,61051)$$
$$\mathbf{S = 1.610,51}$$

*** Resposta:** No final, ao serem pagas as 5 parcelas, será pago como retorno o valor equivalente de R$ 1.610,51

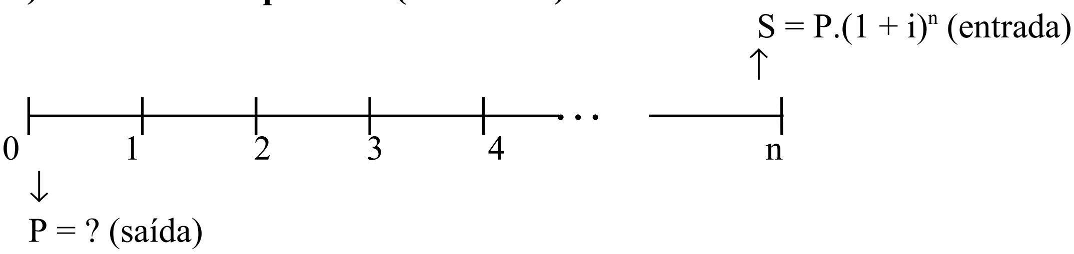
02) FLUXO DE CAIXA - Diagramas:

Denomina-se fluxo de caixa de uma empresa, um investimento, de um indivíduo, etc. ao conjunto de entrada e saída de dinheiro (caixa) ao longo do tempo. Fluxo é a movimentação de entrada e saída de dinheiro (caixa). Fluxo de caixa é a movimentação (entrada e saída) de dinheiro.

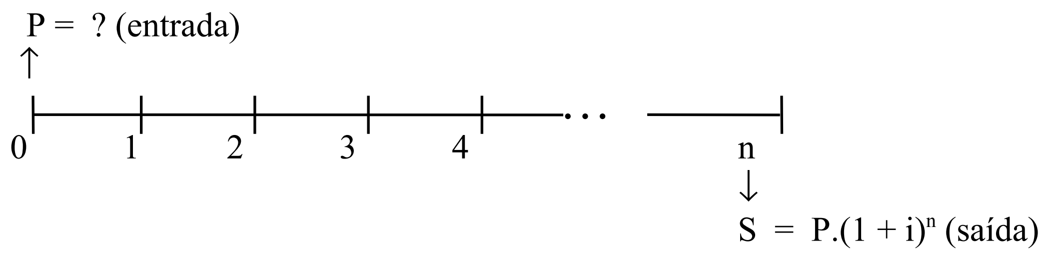
A representação do fluxo de caixa é feita por quadros ou esquemas que representam período a período a situação financeira de um movimento ao longo do tempo.

No esquema abaixo, detalhamos os diagramas de fluxo de caixa em uma aplicação bancária. Nesse caso, o fluxo de caixa pode estar na **visão do aplicador** ou na **visão do banco.**

1) Na visão do aplicador (investidor):



2) Na visão do banco:



a) A escala horizontal representa o tempo que pode ser expresso em dias, semanas, meses, bimestres, semestres, ano, etc.

b) Os números 0, 1, 2, **. . .** n ; são cada parte do período de investimentos e substituem datas de calendário. Constituem o início e o fim do tempo de atualização ou processamento do caixa.

c) As setas para baixo indicam as saídas de dinheiro. As setas para cima indicam a entrada de dinheiro.

d) Vemos pelos esquemas anteriores que os diagramas de fluxo de uma mesma situação para o ponto do credor e do devedor são esquemas opostos. O que pode ser despesa para um será receita para outro; o que é crédito para um é débito para outro ; o que é saída para um é entrada de valores para outro.

A Matemática Financeira objetiva nos fluxos de caixa transformações de fluxo visando equivalências que permitam as suas comparações de maneira fácil e segura.

Os diagramas de fluxos de caixa são esquemas que mostram ao longo do tempo o andamento ou a situação de um investimento financeiro.

Vejamos nos Exemplos a seguir.

01) Exemplo: Uma aplicação em banco de R$ 1.500,00 rende juros compostos a taxa de 5% a.m. durante 5 meses. Determine:

a) o equivalente financeiro no final do período.

b o diagrama de fluxo de caixa para a retirada no final do período na visão do aplicador.

c) o diagrama de fluxo de caixa da situação mês a mês na visão do banco.

*** Resolução:**

a) Do problema temos os dados: $P = 1.500$
$n = 5$ meses
$i = 5\%$ a.m. $= 0{,}05$
$S = ?$

Aplicando na expressão do montante, temos: $S = P.(1 + i)^n$

$S = 1.500.(1 + 0{,}05)^5$

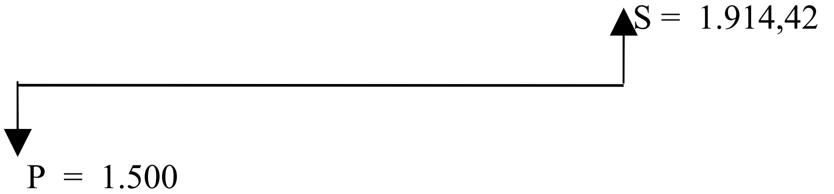
$S = 1.500.(1{,}05)^5$

$S = 1.500.(1{,}276281562)$

$\mathbf{S = 1.914{,}42}$

Logo, aplicando-se hoje R\$ 1.500,00 teremos , ao fim dos 5 meses a taxa de 5% a.m., o equivalente financeiro no valor de R\$ 1.914,42 .

b) Esquematizando o fluxo de caixa na visão do aplicador, teremos:



Nota: No início da aplicação os R\$ 1.500,00 representam saída de dinheiro para o aplicador, logo o diagrama tem a seta para baixo. No final do período os R\$ 1.914,42 representam o retorno (valor equivalente) ou entrada do valor para o aplicador, logo tem a seta para cima. As saídas de valores são indicadas com setas para baixo. As entradas de valores são indicadas com setas para cima.

c) para demonstrarmos o diagrama de fluxo de caixa da aplicação mês a mês na visão do banco, devemos calcular o valor acumulado(montante) no final de cada período.

No final do 1º mês, temos: $S_1 = 1.500{,}00.(1{,}05) = 1.575{,}00$

No final do 2º mês, temos: $S_2 = 1.575{,}00.(1{,}05) = 1.653{,}75$

No final do 3º mês, temos: $S_3 = 1.653{,}75.(1{,}05) = 1.736{,}43$

No final do 4º mês, temos: $S_4 = 1.736{,}43.(1{,}05) = 1.823{,}25$

No final do 5º mês, temos: $S_5 = 1.823{,}25.(1{,}05) = \mathbf{1.914{,}42}$

O diagrama de fluxo de caixa na visão do banco fica:

Nota: No início da aplicação, os R$ 1.500,00 representam entrada de valores para o banco, logo é indicado com seta para cima. Cada montante mês a mês representa saída de valores do banco que serão acumulados e retornados ao aplicador, logo são indicados com setas para baixo.

***Respostas:** a) o equivalente financeiro é R$ 1.914,42
b) vide resolução.
c) vide resolução.

02) Exemplo: Um débito de R$ 1.200,00 deve ser pago no prazo de 4 meses com juros de 7% a.m. No final do 3º mês o devedor deu por conta a quantia de R$ 1.000,00 no débito. Determine:

a) o saldo devedor a pagar no final do 4º mês.

b) o diagrama com os valores dos fluxos de caixa mês a mês na visão do devedor.

*** Resolução:**

a) capitalizamos os juros até o 3º mês e daí descontamos por conta R$ 1.000,00

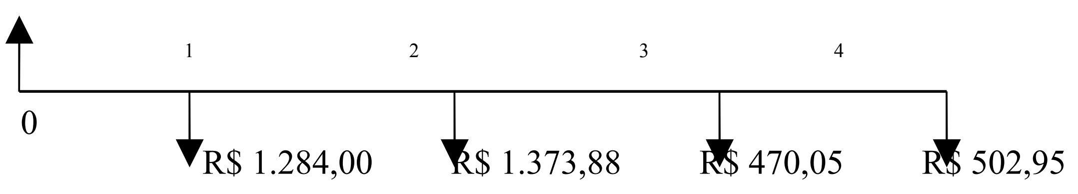
No final do 1º mês temos: S_1 = 1.200 x (1,07) = 1.284,00
No final do 2º mês temos: S_2 = 1.284,00 x (1,07) = 1.373,88
No final do 3º mês temos: S_3 = 1.373,88 x (1,07) = **1.470,05**

Se deu por conta R$ 1.000,00 então fica: 1.470,05 - 1.000,00 = **470,05** para serem capitalizados com a mesma taxa de 7% a.m.

No final do 4º mês, temos: S_4 = 470,05 x (1,07) = **502,95**

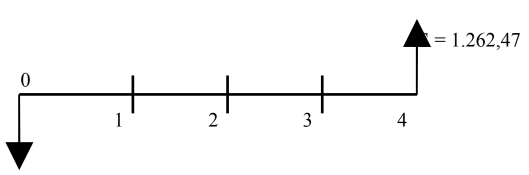
Logo, vemos que o saldo devedor a pagar no final do 4º mês é R$ 502,95 .

b) Esquematizando o diagrama de fluxo de caixa na visão do devedor, temos:



*** Respostas:** a) o saldo devedor a pagar é R$ 502,95 b) vide resolução.

03) Exemplo: O esquema a seguir mostra um diagrama de fluxo de caixa de uma aplicação em banco.



P = 1.000,00

Analisando o diagrama determine:

a) os juros totais embutidos na aplicação.
b) a taxa empregada na aplicação.
c) o diagrama está na visão do aplicador ou do banco ? Justifique.

*** Resolução:**

a) Sabemos que o montante é igual ao capital somados os juros, que expressamos por $S = P + J$, donde tiramos os juros totais embutidos na aplicação.

$S = P + J$

$1.262,47 = 1.000 + J$

$J = 1.262,47 - 1.000$

$\mathbf{J = 262,47}$

b) A taxa é tirada pela expressão do montante: $S = P.(1 + i)^n$, onde temos:

$S = 1.262,47$

$P = 1.000,00$

$n = 4$

$i = ?$

$$1.262,47 = 1.000.(1 + \mathbf{i})^4$$
$$\text{Log } 1.262,47 = \text{Log } [1.000.(1 + \mathbf{i})^4]$$
$$\text{Log } 1.262,47 = \text{Log } 1.000 + \text{Log } (1 + \mathbf{i})^4$$
$$\text{Log } 1.262,47 - \text{Log } 1.000 = 4 . \text{Log } (1 + \mathbf{i})$$
$$3,101221067 - 3 = 4 . \text{Log } (1 + \mathbf{i})$$
$$\frac{0,101221067}{4} = \text{Log } (1 + \mathbf{i})$$
$$\text{Log}_{10} (1 + \mathbf{i}) = 0,025305267$$
$$10^{0,025305267} = 1 + \mathbf{i}$$
$$1 + \mathbf{i} = 1,0599998540$$
$$\mathbf{i} = 1,0599998540 - 1$$
$$\mathbf{i} = 0,0599998540 \text{ ou}$$
$$\mathbf{i} = 0,06$$

Logo, $\mathbf{i = 6\%}$

c) O diagrama representa uma aplicação de R$ 1.000,00 ; como o valor aplicado está com a seta para baixo, significa saída de valores. No final do período, o equivalente financeiro R$ 1.262,47 representa o retorno do valor aplicado ; como as setas estão para cima, significa entrada de valores. Logo podemos concluir que o diagrama está na visão do aplicador. No início da aplicação, sai dinheiro das mãos do aplicador ; no final entra(retorna) dinheiro para as mãos do aplicador.

* Respostas: a) J = R$ 262,47 b) i = 6% c) visão do aplicador.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01) Uma aplicação de R$1.700,00 rende juros compostos a taxa de 4% durante 4 meses.
Determine:
a) o montante no final do período.
b) o diagrama de fluxo de caixa para a retirada no final do período na visão do aplicador.

02) Fez-se um empréstimo hoje de R$ 800,00 para ser pago em 5 meses a juros compostos de 7 % no período. Determine:

a) o valor a ser pago no final do período.
b) o esquema de fluxo de caixa na visão do devedor.
c) o diagrama de fluxo de caixa na visão do credor.

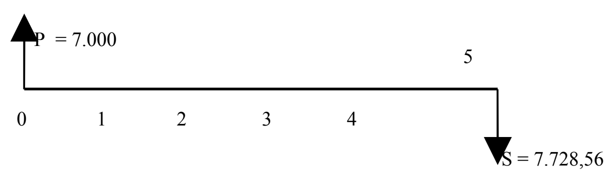
03) Depositei em banco a quantia de R$ 1.500,00 para render juros compostos de 2% ao mês por um período de 4 meses. Determinar:

a) o valor acumulado no final do período.
b) o diagrama de fluxo de caixa na visão do depositário.
c) o diagrama de fluxo de caixa na visão do banco.
d) o esquema de fluxo de caixa com os valores mês a mês na visão do depositário.
e) o diagrama de fluxo de caixa com os valores mês a mês na visão do banco.

04) Um débito de R$ 900,00 deve ser pago em 5 parcelas a juros compostos de 5% ao mês. No final do 3º mês, o devedor dá por conta a importância de R$ 500,00. Determinar:

a) o débito restante a pagar após o 3º mês.
b) o débito a pagar no final do período.
c) o diagrama de fluxo de caixa da situação na visão do devedor.

05) O esquema abaixo nos mostra um diagrama de fluxo de caixa de uma aplicação em banco.



Determine:

a) os juros totais embutidos na aplicação.
b) a taxa empregada na operação
c) o diagrama está na visão do aplicador ou do banco ?

06) Uma quantia de R$ 1.200,00 foi depositada em banco durante 4 meses rendendo juros compostos a 3% no período. No final do 3º mês, aplicou-se mais a importância de R$ 400,00 . Determinar:

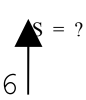
a) o valor acumulado no final do período.
b) o diagrama de fluxo de caixa na visão do depositário.

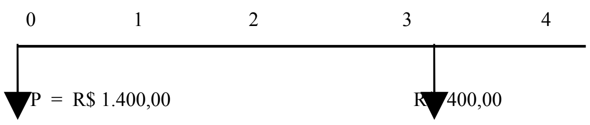
07) Se eu fizer uma aplicação bancária de R$ 400,00 mês a mês (todo mês) a juros compostos de 2% no período, quanto terei no final de 1(um) semestre ?

08) Uma instituição bancária paga a juros compostos a taxa de 4% a.m. sobre as aplicações efetuadas. Apliquei nesse banco a importância de R$ 1.700,00 durante 6 meses. No 3º mês faço uma retirada de R$ 500,00. No 5º mês faço outro depósito de R$ 400,00. Determinar:

a) o saldo após o 3º mês.
b) o valor acumulado no final do período.
c) o diagrama de fluxo de caixa da situa;cão na visão do banco.

09) O diagrama abaixo representa uma aplicação em banco.





Sabendo que a taxa de juros compostos envolvida na operação é de 4% a.m. , determine:

a) o valor acumulado mês a mês.
b) o montante no final do período.
c) o diagrama está na visão do aplicador ou do banco ? Justifique.

10) Uma instituição bancária paga 6% de juros compostos sobre as aplicações efetuadas. Apliquei R$ 800,00 neste banco. Após 3 meses depositei mais R$ 200,00. Dois meses após este depósito, apliquei mais R$ 400,00. Determine:
a) o diagrama de fluxo de caixa com os valores acumulados mês a mês na visão do aplicador.
b) o montante no final do período.

11) Uma aplicação de R$ 800,00 foi feito em banco a juros compostos de 7% a.m. durante 5 meses. Determinar:
a) o valor acumulado no final do período.
b) os juros embutidos ao final do período.
c) o diagrama de fluxo de caixa da situação na visão do banco.

12) O diagrama de fluxo de caixa abaixo representa uma aplicação bancária.

Sabendo a taxa envolvida na aplicação foi de 10% por período, determine:
a) o montante no final do período.
b) os juros embutidos ao final do período
c) o diagrama está na visão do aplicador ou do banco ? Justifique.

13) Depositei em banco a importância de R$ 1.800,00 a juros compostos de 8% a.m. durante 6 meses. Se ao final do cada mês eu fizer retiradas de R$ 150,00 , qual será meu saldo no final do período (6 meses) ?

03) FATORES MULTIPLICATIVOS:

Veremos agora neste capítulo a utilização de fatores multiplicativos que nos ajudarão a encontrar valores pedidos. Veremos também em cada item a seguir a demonstração, obtenção e utilização da expressões dos fatores que serão usadas em situações - problemas inversas e / ou consecutivas. Mostraremos o emprego dos fatores dois a dois por se referirem a situações inversas.

3.1 - Fator FPS - Fator de P para S: Dado P achar S.

Da expressão do montante $S = P.(1 + i)^n$, vemos que para achar o valor de S basta multiplicar o valor de P pela expressão $(1 + i)^n$.

A expressão $(1 + i)^n$ é chamada de fator multiplicativo de P para S , ou seja, **fator FPS**.

Assim, podemos fazer: $FPS = (1 + I)^n$ e então: $S = P.(1 = i)^n$

$S = P \cdot FPS$

O fator FPS depende apenas dos parâmetros **i** e **n** podendo ser calculado pela expressão $(1 + i)^n$ ou ser obtido consultando-se na tabela de fatores o valor relativo aos parâmetros **i** e **n**.

Sendo FPS dado em função de **i** e **n**, podemos representá-lo da forma:

$$\boxed{\mathbf{FPS_{(i\,,\,n)} = (1 + i)^n}}$$

Vejamos alguns Exemplos de aplicação.

01) Exemplo: Qual o valor do fator $FPS_{(4\%,\ 12)}$?

Na tabela de fatores da taxa de 4% oferece na linha 12 para o fator FPS o valor de 1,601032.

Por outro lado, o fator FPS é calculado pela expressão: $FPS_{(i\,,\,n)} = (1 + i)^n$

Assim fazemos: $i = 4\% = 0{,}04$

$n = 12$ $\qquad FPS_{(4\%,\ 12)} = (1 + 0{,}04)^{12}$

$FPS_{(4\%,\ 12)} = (1{,}04)^{12}$

$FPS_{(4\%,\ 12)} = 1{,}601032$

* Resposta: $FPS_{(4\%,\ 12)} = 1{,}601032$

02) Exemplo: Qual o montante acumulado em 6 meses a uma taxa de 15% ao mês a juros compostos quando aplicado R$ 1.500,00 ?

* Resolução: Do problema tiramos os dados: $n = 6$

$i = 15\% = 0{,}15$

$P = 1.500{,}00$

$S = ?$

$FPS = ?$

$FPS_{(i\,,\,n)} = (1 + i)^n$

$FPS_{(15\%,\ 6)} = (1 + 0{,}15)^6$

$FPS_{(15\%,\ 6)} = (1{,}15)^6$

$FPS_{(15\%,\ 6)} = 2{,}313059$

O montante é dado pela expressão: $S = P \cdot FPS \rightarrow S = 1.500 \ .\ 2.313059$

$S = 3.469{,}58$

* Resposta: R$ 3.469,58

3.1 - Fator FSP - Fator de S para P - Dado S achar P:

Da expressão do montante $S = P.(1 + i)^n$ vemos que para termos o valor de P, basta dividir o valor de S pela expressão $(1 + i)^n$.

$S = P.(1 + i)^n$

$$\frac{S}{(1 + i)^n} = P$$

$$\frac{1}{(1 + i)^n} \cdot S = P$$

$$\mathbf{(1 + i)^{-n} \ .\ S = P}$$

A expressão $(1 + i)^{-n}$ é chamada de fator multiplicativo de S para P, ou seja, FSP. Assim, podemos fazer: $FSP = (1 + i)^{-n}$ e então:

$(1 + i)^{-n} \ .\ S = P$

$P = (1 + i)^{-n} \cdot S$

$P = S \cdot FSP$

O fator FSP depende apenas dos parâmetros **i** e **n,** podendo ser calculado pela expressão $(1 + i)^{-n}$ ou ser obtido consultando-se na tabela de fatores o valor relativo aos parâmetros **i** e **n** . Sendo FSP dado em função de i e n, podemos representá-lo de forma:

$FSP_{(i, n)} = (1 + i)^{-n}$

$$\boxed{FSP_{(i\ n)} = \frac{1}{(1 + i)^n}}$$

01) Exemplo: Qual o valor do fator $FSP_{(10\%, 7)}$?

* Resolução: Aplicando na fórmula temos: $FSP_{(i\ n)} = \dfrac{1}{(1 + i)^n}$

$FSP_{(10\%, 7)} = 1 / (1 + 0,10)^7$

$FSP_{(10\%, 7)} = 1 / (1,1)^7$

$FSP_{(10\%, 7)} = 1 / (1,948717)$

$FSP_{(10\%, 7)} = 0,513158$

* Resposta: $FSP_{(10\%, 7)} = 0,513158$

02) Exemplo: Quanto se deve aplicar hoje para se obter daqui a 8 meses, a juros compostos de 17%, um montante de R$ 17.750,00 ?

* Resolução:

$FSP_{(i, n)} = (1 + i)^{-n}$

$FSP_{(17\%, 8)} = 1/ (1 + 0,17)^8$

$FSP_{(17\%, 8)} = 1 / (1,17)^8$

$FSP_{(17\%, 8)} = 1 / (3,511449)$

$FSP_{(17\%, 8)} = 0,284782$

Aplicando o FSP na expressão $P = S \cdot FSP$, temos:

$P = S \cdot FSP$

$P = 17.750 \cdot 0,284782$

$P = 5.054,88$

* Resposta: Deve-se aplicar R$ 5.054,88

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Sendo $(1 + i)^n$ a expressão do fator FPS, determine o FPS em cada caso abaixo:

a) para i = 5% e n = 6
b) para i = 7% e n = 5
c) para i = 4% e n = 4

2) Sendo $(1 + i)^{-n}$ a expressão do fator FSP, determine o FSP em cada caso abaixo:

a) para i = 6% e n = 5
b) para i = 5% e n = 4
c) para i = 3% e n = 6

3) Um capital investido a juros compostos a taxa de 5% a.m. quando aplicado em 6 meses rendem montante de R$ 15.750,00. Qual foi o valor da aplicação ?

4) Em uma agência bancária foram feitos três depósitos de R$ 500,00 ; R$ 400,00 e R$ 200,00 ; respectivamente no início dos meses de **março, abril** e **maio.** Determine:

a) o valor acumulado após o 2º depósito
b) o valor acumulado antes do 3º depósito
c) o montante ao fim do mês de **julho**

5) Duas aplicações iguais renderam juros a taxa de 5% e 7% , respectivamente, em um mesmo prazo de 3 meses. Se o montante de uma aplicação excede a outra em R$ 150,00 ; qual o valor das aplicações ?

6) Uma quantia foi dividida em duas partes iguais, sendo a 1º aplicada a juros de 4% a.m. por 3 meses e a 2º aplicada a juros de 6% a.m. por 5 meses. Se o montante de uma aplicação excede o montante da outra em R$ 300,00 ; qual o valor da quantia dividida ?

7) Uma aplicação de R$ 1.600,00 foi feita a taxa de 5% a.m. por um período de 6 meses. No fim do 3º mês houve uma retirada de R$ 500,00. Ao fim do 5º mês aplicou-se mais R$ 300,00 . Determinar:

a) o valor residente no fim do 3º mês.
b) o valor acumulado no fim do 5º mês.
c) o montante retirado no final do período.

8) Aplicou-se R$ 1.300,00 a taxa de 6% a.m. por um período de 4 meses. Qual o valor acumulado no final de cada mês ?

9) Em uma agência bancária depositou-se R$ 1.500,00 a taxa de 5% a.m. Após o 3º mês retirou-se R$ 450,00. Após o 5º mês aplicou-se mais R$ 350,00 . Determine:

a) o valor residente após o 3º mês.
b) o valor acumulado após o 5º mês.
c) o montante retirado ao fim do 7º mês.

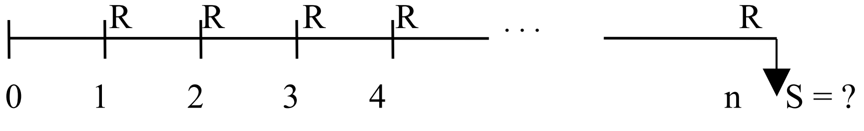
10) Efetuando-se depósitos de R$ 600,00 ; R$ 800,00 e R$ 1.000,00 nos meses de **agosto, setembro** e **outubro,** respectivamente na mesma data, determine:

a) o valor acumulado após o 3º depósito.
b) o montante ao fim do mês de **novembro.**

3.1 - Fator FRS - Fator de R para S - Dado R achar S:

O fator FRS tem a expressão que calcula o valor final do montante S quando um investimento é feito em parcelas iguais a R. As parcelas iguais R são os pagamentos efetuados no final de cada prazo do investimento.

Vejamos o diagrama de fluxo de caixa para este investimento.



Por outro lado, desejando efetuar o pagamento das prestações R no final do período (na data da última prestação) teríamos que reajustar cada prestação R até a data da última prestação, o que seria feito da seguinte forma:

1º prestação a resjustar: $S_1 = R.(1 + i)^{n-1}$

2º prestação a reajustar: $S_2 = R.(1 + i)^{n-2}$
3º prestação a reajustar: $S_3 = R.(1 + i)^{n-3}$

Vemos que todas estas prestações serão pagas na data **n**, sendo dado pela soma dos reajustes. Assim:

$\mathbf{S} = S_1 + S_2 + S_3 + \mathbf{...} + S_n \rightarrow$ soma total das parcelas reajustadas.

Verificamos pois que a expressão acima (das prestações reajustadas) representa a soma dos termos de uma PG dada por: $\mathbf{Sn = \dfrac{a_1 . (q^n - 1)}{q - 1}}$

Fazendo a equivalência entre as prestações reajustadas e os termos da P.G., temos:

$a_1 = R \rightarrow$ corresponde ao 1º termo ou a 1ª parcela R a ser paga antes do reajuste.
$q = (1 + i) \rightarrow$ corresponde a razão da P.G. ou ao fator de reajuste de uma prestação R de uma data para outra.
$n \rightarrow$ número de termos da P.G. ou número de parcelas R ou número de períodos do investimento.
$Sn = \mathbf{S} \rightarrow$ corresponde a soma dos termos da P.G. ou ao montante **S** no final do período após os reajustes de cada prestação R.

A expressão do montante fica definida por:

$$Sn = \frac{a_1 . (q^n - 1)}{q - 1} \rightarrow \mathbf{S} = \frac{R.[(1 + i)^n - 1]}{(1 + i) - 1} \rightarrow \mathbf{S} = \frac{R.[(1 + i)^n - 1]}{i} \rightarrow \mathbf{S} = R. \left| \frac{(1 + i)n - 1}{i} \right|$$

Vemos então que para encontrar o montante **S,** basta multiplicar R pela expressão: $\dfrac{(1 + i)n - 1}{i}$

Esta expressão é chamada de fator multiplicativo de R para S, ou seja, **fator FRS.**

Assim podemos fazer: $FRS = \left| \dfrac{(1 + i)^n - 1}{i} \right|$ e então: $S = R . \left| \dfrac{(1 + i)^n - 1}{i} \right|$

$$S = R . FRS$$

O fator FRS depende apenas dos parâmetros **i** e **n,** podendo ser calculado pela expressão $\dfrac{(1 + i)^n - 1}{i}$ ou ser obtido consultando-se na tabela de fatores o valor relativo aos parâmetros **i** e **n.** Então podemos representá-lo por:

$$\boxed{FRS_{(i,\,n)} = \left| \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right|}$$

01) Exemplo: Uma pessoa faz aplicação de R$ 1.500,00 por mês, ou seja, todo mês. Sendo a taxa de capitalização de 2,5% ao mês, determine:

a) o valor acumulado no final do 5º mês.

b) o diagrama de fluxo de caixa mês a mês do investimento na visão do aplicador.

* Resolução: Do problema temos os dados: depósitos mensais → R = 1.500
taxa mensal → i = 2,5% = 0,025 a.m.
período de aplicação → n = 5
valor acumulado no final do período → S = ?

a) Substituindo-se os dados na expressão do montante, temos: S = R . FRS

$$FRS_{(i,\, n)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

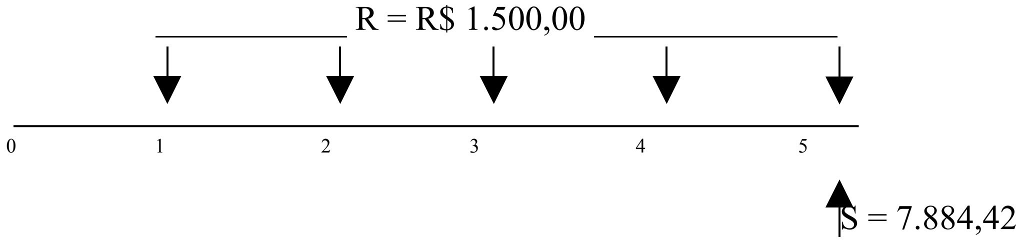
$$FRS_{(2,5\%;\, 5)} = \frac{(1+0,025)^5 - 1}{0,025}$$

$$FRS_{(2,5\%;\, 5)} = \frac{(1,025)^5 - 1}{0,025}$$

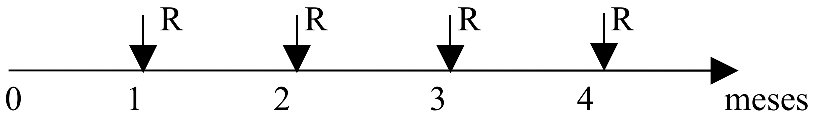
$$FRS_{(2,5\%;\, 5)} = 5,256280$$

S = R . FRS
S = 1.500 . 5,256280
S = 7.884,42

b) O fluxo de caixa mês a mês é dado a seguir:



02) Exemplo: Uma pessoa efetua depósitos de R$ 3.000,00 por mês conforme fluxo abaixo:



Sendo a taxa mensal de remuneração de 4%, determine o valor acumulado:
a) após o quarto depósito.
b) imediatamente antes do quarto depósito.

* **Resolução:** Do problema tiramos os dados: depósitos mensais → R = 3.000,00
taxa mensal → i = 4% = 0,04
período de aplicação → n = 4
valor acumulado no final do período → S = ?

a) O valor acumulado após o 4º depósito é dado por: **S = R . FRS**

$$FRS = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$FRS = \frac{(1+0,04)^4 - 1}{0,04}$$

$$FRS = \frac{(1,04)^4 - 1}{0,04}$$

S = R . FRS
S = 3.000 x 4,24670
S = 12.740,10

$$FRS = \frac{1,169868 - 1}{0,04}$$

$$FRS = 0,169868 / 0,04$$

$$\mathbf{FRS = 4,24670}$$

b) O montante S = 12.740,00 é o valor acumulado após ter-se efetuado o 4º depósito. Logo o valor acumulado imediatamente antes do 4º depósito é dado subtraindo-se o 4º depósito. Assim:

* Montante após o quarto depósito → S = 12.740,10
* Valor do quarto depósito → R = 3.000,00
* Valor acumulado imediatamente antes do 4º depósito → 12.740,10 - 3.000 = 9.740,00

***Respostas:** a) R$ 12.740,10
b) R$ 9.740,10

3.2 - Fator FSR - Fator de S para R - Dado S para achar R:

O fator **FRS** tem a expressão que calcula o valor das prestações **R** a financiar durante **n** períodos do investimento para se obter no final o valor acumulado **S**.

O fator FSR é obtido pela expressão anterior do FRS. Vejamos:

$$S = R \,.\, FRS$$

$$S = R \,.\, \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$R = S : \frac{i}{(1 + i)^n - 1}$$

A expressão $\left| \frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right|$ é chamada de fator multiplicativo de S para R, ou seja, fator **FSR**.

Assim, podemos fazer $FSR = \left| \frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right|$ e então $R = S \,.\, \left| \frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right|$

$$\mathbf{R = S \,.\, FSR}$$

O fator FSR depende apenas dos parâmetros **i** e **n**, podendo ser calculado pela expressão $\frac{i}{(1 + i)^n - 1}$ ou ser obtido consultando-se na tabela de fatores o valor relativo aos parâmetros **i** e **n.**

01) Exemplo: Quanto se deve depositar bimestralmente numa conta que rende 9% por bimestre para se ter a importância de R$ 250.000,00 daqui a 2 anos ?

* Resolução: Do problema temos os dados: S = 250.000
i = 9% = 0,09 a.b.
n = 2 anos = 12 bimestre
R = ?

$$FSR = \frac{i}{(1 + i)^n - 1} = \frac{0,09}{(1 + 0,09)^{12} - 1} = 0,049650$$

R = S . FSR
R = 250.000 x 0,049650
R = 12.412,50

* **Resposta:** Deve-se depositar R$ 12.412,50

02) Exemplo: Deseja-se adquirir uma imóvel á vista por R$ 1.900,00 daqui a 5 meses. Poupando-se certa quantia mensal aplicada a taxa de 3% a.m. ; calcule:

a) a quantia que se deve aplicar mensalmente para a compra do imóvel.
b) o diagrama de fluxo de caixa do investimento.

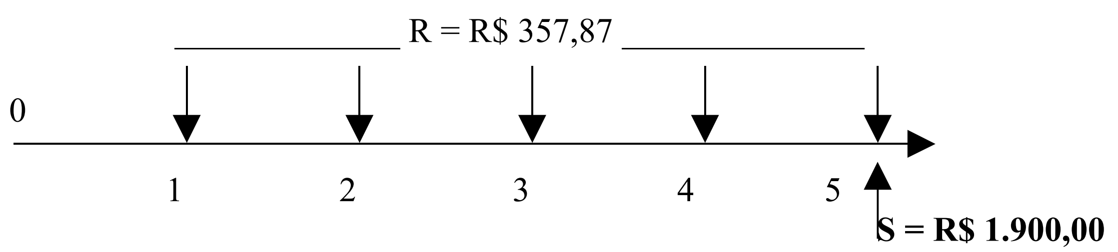
* **Resolução:** Do problema, tiramos os dados: S = 1.900
n = 5 meses
i = 3% = 0,03 a.m.

a) A quantia aplicada mensalmente são as prestações R de investimento.

$$FSR = \frac{i}{(1 + i)^n - 1} = \frac{0,03}{(1 + 0,03)^{5} - 1} = 0,188355$$

R = S . FSR
R = 1.900 x 0,188355
R = 357,87

b) O diagrama de fluxo de caixa é esquematizado a seguir:



* **Respostas:** a) R = R$ 357,87 b) Vide resolução.

03) Exemplo: Adquiri uma equipamento que tem vida útil econômica de 3 anos por R$ 700.000,00 . Assim daqui a 3 anos haverá necessidade de reposição desse equipamento.

Quanto deverá ser depositado anualmente, numa conta de prazo fixo que rende 12% a.a. de modo que haja a disponibilidade de 700 mil ao fim de 3 anos para comprar novo equipamento ?

* Resolução: Devemos depositar a quantia R para adquirir o valor dos 700 mil.
Do problema temos os dados: S = 700.000,00
n = 3 anos
i = 12% = 0,12 a.a.
R = ?

Aplicando na expressão do montante, temos:

$$FSR = \frac{i}{(1+i)^n - 1} = \frac{0,12}{(1+0,12)^3 - 1} = 0,296348$$

R = S . FSR
R = 700.000 x 0,296348
R = 207.443,60

*** Resposta:** Deve-se depositar a quantia de R$ 207.443,60

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01) Sendo $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ a expressão do fator FRS, determine o FRS em cada item abaixo:

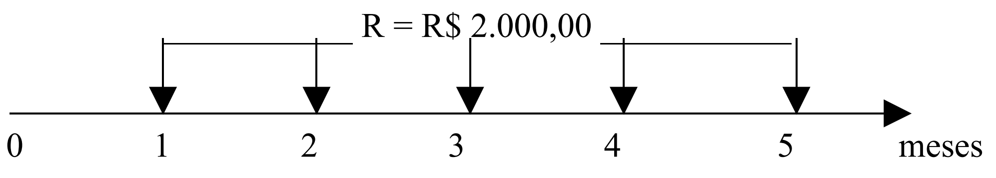
a) para i = 3% e n = 4
b) para i = 4% e n = 3
c) para i = 6% e n = 5

02) Sendo $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$ a expressão do fator FSR, determine o FSR em cada item abaixo:

a) para i = 4% e n = 3
b) para i = 3% e n = 4
c) para i = 5% e n = 5

03) Fez-se uma aplicação bancária de R$ 1.400,00 por mês. Se o banco capitaliza a uma taxa de 3% a.m. Determine:
a) o valor acumulado no final do 4º mês.
b) o diagrama de fluxo de caixa do investimento na visão do aplicador.

04) Uma pessoa efetua depósitos de R$ 2.000,00 por mês, conforme fluxo abaixo:



Sendo a taxa mensal de remuneração de 4%, determine o valor acumulado:
a) após o 4º depósito.
b) imediatamente antes do 5º depósito.
c) o valor acumulado no final do período.

05) Uma aplicação em banco de R$ 5.000,00 por mês por um período de 7 meses é feito a taxa de 6% a. m. Determinar:

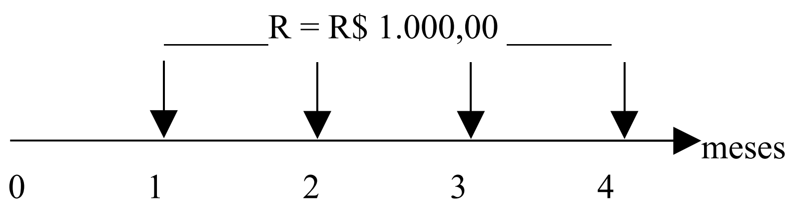
a) o valor acumulado após o 4º depósito.
b) o valor acumulado imediatamente antes do 6º depósito.
c) o valor acumulado no final do período.
d) o diagrama de fluxo de caixa da situação na visão do banco.

06) Aplicando-se R$ 900,00 por mês durante 5 meses a taxa de 5% , quanto terei acumulado no final do período ?

07) Aplicou-se R$ 1.500,00 por mês durante 4 meses a taxa de 4% . Qual o valor acumulado imediatamente antes do 4% depósito ?

08) Aplicando-se R$ 2.500,00 por mês durante 4 meses a taxa de 3% a. m. , quanto terei acumulado no final do período ?

09) Qual o montante na data 4 do fluxo de caixa abaixo a uma taxa de 7% a.m. ?



10) Hoje o valor de um imóvel custa R$ 2.000,00. Desejo comprá-lo em 4 parcelas iguais a **R** financiadas a taxa 4% a.m. Qual o valor das parcelas a pagar na compra do imóvel ?

11) Desejo adquirir um imóvel no valor de R$ 1.200,00 em 5 parcelas. Quanto devo aplicar mensalmente a taxa d e 5% a.m. para a compra do imóvel ?

12) A compra de um imóvel no valor de R$ 1.700,00 em 6 parcelas iguais é feita com aplicação mensal a taxa de 3% a.m. Calcule:

a) o valor das parcelas que se deve aplicar mensalmente na compra do imóvel.
b) o diagrama de fluxo de caixa da situação na visão do comprador.

13) Adquire-se um bem com vida útil econômica de 4 anos por R$ 500.000,00 ; de forma que ao final desse prazo haverá necessidade de reposição desse equipamento. Quanto deverá ser depositado anualmente a taxa de 9% a.a. para que se tenha disponível os R$ 500.000,00 ao final do período, para obter-se outro equipamento ?

14) Deseja-se obter um bem de produção com vida útil de 5 anos por R$ 600.000,00 . Havendo necessidade de repô-lo ao fim de 5 anos, quanto deverá ser depositado anualmente a taxa de 8% a.a. para obter-se novamente um outro bem ?

15) Um bem de produção com vida útil de 6 anos custou R$ 1.200,00. Tendo que ser substituído por outro quanto deverá ser aplicado anualmente a taxa de 7% a.a. para adquirir outro bem ?

16) Quanto se deve depositar mensalmente numa certa conta que rende 5% a.m. para se ter a importância de R$ 300.000,00 no fim de 1,5 ano ?

17) Aplicando-se certa quantia em conta que rende 3% por mês, deseja-se obter a importância de R$ 40.000,00. Quanto se deve aplicar mensalmente ?

18) Quanto se deve aplicar por mês numa conta que rende 6% a.m. para se ter a importância de R$ 50.000,00 no fim de 1(um) ano ?

19) A compra de um bem de vida útil de 5anos será feita com aplicação a taxa de 8% a.a. para reposição do custo de R$ 1.700,00 do bem. Determine o valor das aplicações anuais para a reposição do bem.

20) Desejo adquirir um imóvel no valor de R$ 1.300,00 em 4 parcelas. Quanto devo aplicar mensalmente a taxa de 6% a.m. para a compra do imóvel ?

3.3 - Fator FPR - Fator de P para R - Dado P para achar R:

O fator FPR tem a expressão que calcula o valor das prestações **R** de um financiamento no valor **P** investido a uma taxa **i** pelo prazo de **n** prestações. Desse modo, quer-se financiar um bem no valor **P** para ser pago em n parcelas iguais a **R**. Devemos achar o fator **FPR** que, dado o valor do financiamento, teremos o valor das prestações **R**.

O fator FPR é obtido pelas expressões do montante que deduzimos anteriormente:

* Vimos que dado P para encontrar S, temos: $S = P.(1 + i)^n$ **(I)**

* Vimos que dado R para encontrar S, temos: $S = R \,.\, \left| \dfrac{(1 + i)^n - 1}{i} \right|$ **(II)**

Comparando as duas expressões de **(I)** e **(II),** temos:

$$P \,.\, (1 + i)^n = R \,.\, \left| \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right|$$

$$R = \frac{P \,.\, (1 + i)^n}{\left| \dfrac{(1 + i)n - 1}{i} \right|}$$

$$R = P \,.\, \left| \frac{(1 + i)^n \,.\, i}{(1 + i)^n - 1} \right|$$

A expressão $\left| \dfrac{(1 + i)^n \,.\, i}{(1 + i)^n - 1} \right|$ é chamada de fator multiplicativo de P para R, ou seja, fator FPR.

Assim sendo, podemos fazer: $FPR = \left| \dfrac{(1 + i)^n \,.\, i}{(1 + i)^n - 1} \right|$ e então $R = P \,.\, \left| \dfrac{(1 + i)^n \,.\, i}{(1 + i)^n - 1} \right|$

R = P . FPR

O fator FPR depende apenas dos parâmetros i e n, podendo ser calculado pela expressão $\dfrac{(1 + i)^n \,.\, i}{(1 + i)^n - 1}$ ou ser obtido consultando-se na tabela de fatores o valor relativo aos parâmetros **i** e **n**.

Assim podemos fazer: $FPR_{(i,\, n)} = \left| \dfrac{(1 + i)^n \,.\, i}{(1 + i)^n - 1} \right|$

01) Exemplo: Determine o FPR para um financiamento de 4 meses a taxa de 7% a.m.

* Resolução: Dados os parâmetros i = 0,07 e n = 4, aplicamos na expressão do FPR

$$FPR_{(i,n)} = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{(1+0{,}07)^4 \cdot 0{,}07}{(1+0{,}07)^4 - 1} = \frac{(1{,}07)^4 \cdot 0{,}07}{(1{,}07)^4 - 1} = 0{,}295225$$

* Logo, temos que FPR = 0,295225.

02) Exemplo: Um imóvel hoje está avaliado em R$ 90.000,00 . Desejo comprá-lo em 7 parcelas mensais iguais, sem entrada, com juros de 8% de no período. Qual o valor das prestações a pagar ?

* Resolução: Do problema tiramos os dados: P = 90.000 ; n = 7 ; i = 8% e R = ?

Utilizamos a expressão do fator FPR.

$$FPR_{(i,n)} = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{(1+0{,}08)^7 \cdot 0{,}08}{(1+0{,}08)^7 - 1} = \frac{(1{,}08)^7 \cdot 0{,}08}{(1{,}08)^7 - 1} = 0{,}192072401$$

Utilizamos agora a expressão: **R = P . FPR**

R = 90.000 x 0,192072401

R = 17.286,51

* Resposta: O valor das prestações a pagar é R$ 17.286,51

03) Exemplo: Uma loja financia eletrodomésticos em 5 prestações mensais iguais. Desejando ter uma taxa efetiva de 6% a.m., determine:

a) o valor das prestações para um financiamento de R$ 4.000,00

b) o diagrama de fluxo de caixa do financiamento.

* Resolução:

a) Do problema tiramos os dados: P = 4.000

n = 5

i = 6% = 0,06

O fator FPR depende apenas dos parâmetros i e n, então:

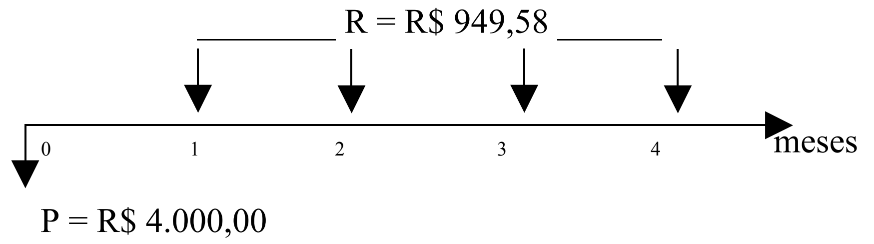
$$FPR_{(i,n)} = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{(1+0{,}06)^5 \cdot 0{,}06}{(1+0{,}06)^5 - 1} = \frac{(1{,}06)^5 \cdot 0{,}06}{(1{,}06)^5 - 1} = 0{,}237395$$

Para acharmos o valor de cada prestação, temos: R = P . FPR

R = 4.000 x 0,237395

R = 949,58

b) O diagrama de fluxo de caixa é dado a seguir:



* Respostas: a) R$ 949,58 b) Vide resolução.

04) Exemplo: Um imóvel está avaliado em R$ 80.000,00. Desejo vendê-lo em 5 prestações mensais iguais, sem entrada, acrescidos juros de 5% a.m. Determine:

a) o valor das prestações.

b) o valor nominal do imóvel equivalente ao serem pagas todas as prestações.

c) o comprador pagou a 1ª prestação e atrasou as demais. No vencimento da última prestação prestou contas para liquidar o débito, acrescidos dos juros combinados, quanto pagou pelas prestações em atraso ?

* Resolução: Do problema tiramos os dados: P = 80.000

n = 5

i = 5% = 0,05

a) Calculamos em primeiro lugar o fator FPR para encontrarmos o valor das prestações na expressão **R = P . FPR**

$$FPR_{(i,\,n)} = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{(1+0{,}05)^5 \cdot 0{,}05}{(1+0{,}05)^5 - 1} = \frac{(1{,}05)^5 \cdot 0{,}05}{(1{,}05)^5 - 1} = 0{,}230974$$

Utilizamos a expressão R = P . FPR

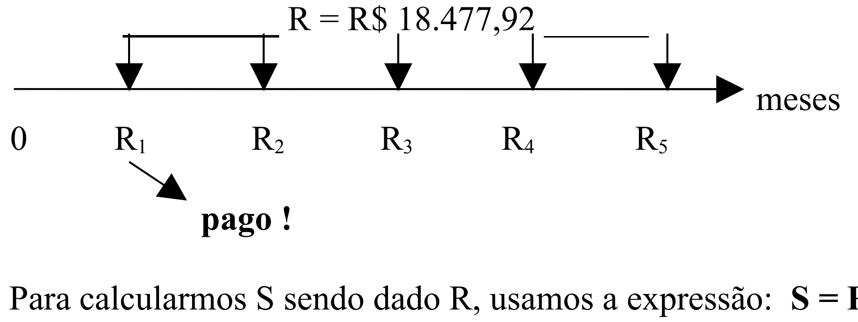
R = 80.000 x 0,230974

R = 18.477,92

b) De acordo com o princípio de equivalência financeira, ao serem pagas todas prestações, o valor do imóvel passou a ser 5 x 18.477,92 = **R$ 92.389,60** que é equivalente a seu valor de R$ 80.000,00 cinco meses atrás.

c) Tendo pago somente a 1ª prestação, restou 4 prestações de R = 18.477,92 para serem reajustadas até a data da última prestação. Nesse caso, quero saber qual o valor do montante a pagar na data do último pagamento. Note agora que o problema é: **dado R achar S.**

Vejamos o fluxo de caixa para a situação:



Para calcularmos S sendo dado R, usamos a expressão: **S = R . FRS**

Vamos calcular o fator FRS:

$$FRS = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0{,}05)^3 - 1}{0{,}05} = \frac{(1{,}05)^3 - 1}{0{,}05} = 3{,}15250$$

Utilizando a expressão do montante, temos: $S = R \cdot FRS$

$$S = 18.477,92 \times 3,15250$$

$$\mathbf{S = 58.251,64}$$

*** Respostas:** a) R$ 18.477,92 b) R$ 92.389,60 c) R$ 58.251,64

3.4 - Fator FRP - Fator de R para P - Dado R para achar P:

O fator **FRP** tem a expressão que calcula o valor de um financiamento **P** dividido em **n** parcelas iguais a **R**. Desse modo, quer-se saber o valor de um financiamento **P** sendo dado o valor das prestações **R**. Devemos achar o fator **FRP** que dada a prestação **R** teremos o valor do financiamento **P**.

A expressão do fator FRP é dada a partir da expressão do fator FPR, visto que ambos envolvem situações inversas. Assim temos:

$$R = P \cdot FPR \qquad FPR = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

$$R = P \cdot \left| \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \right|$$

$$P = R : \left| \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \right|$$

$$P = R \cdot \left| \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right|$$

A expressão $\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$ é chamada de fator multiplicativo de R para P, ou seja, é o fator FRP.

Assim sendo, podemos fazer: $FRP = \left| \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right|$ e então $P = R \cdot \left| \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right|$

$$\mathbf{P = R \cdot FRP}$$

O fator FRP depende apenas dos parâmetros **i** e **n**, podendo ser calculado pela expressão $\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$ ou ser obtido consultando-se na tabela de fatores o valor relativo aos parâmetros **i** e **n**.

Assim, podemos fazer: $FRP_{(i,n)} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$

01) Exemplo: Ache o fator FRP para um financiamento de 6 parcelas iguais a taxa de 7% no período.

* Resolução: O fator FRP é dado em função dos parâmetros $i = 7\% = 0,07$

$n = 6$

$$FRP_{(7\%,6)} = \frac{(1+0,07)^6 - 1}{(1+0,07)^6 \cdot 0,07} = \frac{(1,07)^6 - 1}{(1,07)^6 \cdot 0,07} = 4,766532$$

Logo, o fator FRP vale: **$FRP_{(7\%, 6)}$ = 4,766532**

*** Resposta:** $FRP_{(7\%, 6)}$ = 4,766532

02) Exemplo: Um financiamento foi feito a taxa de 4% ao mês para ser pago em 8 prestações mensais iguais de R$ 800,00. Qual o valor do financiamento ?

* Resolução: Do problema tiramos os dados: R = 800
n = 8
i = 4% = 0,04

Calculamos o fator FRP:

$$FRP_{(4\%, 8)} = \frac{(1 + 0{,}04)^8 - 1}{(1 + 0{,}04)^8 \cdot 0{,}04} = \frac{(1{,}04)^8 - 1}{(1{,}04)^8 \cdot 0{,}04} = 6{,}732801$$

Dada a prestação R para o financiamento P, usamos a expressão: **P = R . FRP**

P = R . FRP
P = 800 x 6,732801
P = 5.386,24

* Resposta: O valor do financiamento é R$ 5.386,24

03) Exemplo: Qual o valor do menor investimento que devemos fazer hoje, a uma taxa de 15% ao mês, para render R$ 15.000,00 no final de cada um dos próximos 5 meses ?

* Resolução: Do problema tiramos os dados: R = 15.000
n = 5
i = 15% = 0,15
P = ?

Calculamos o valor do fator FRP:

$$FRP_{(15\%, 5)} = \frac{(1 + 0{,}15)^5 - 1}{(1 + 0{,}15)^5 \cdot 0{,}15} = \frac{(1{,}15)^5 - 1}{(1{,}15)^5 \cdot 0{,}15} = 3{,}352157$$

O valor do investimento é dado por: P = R . FRP
P = 15.000 x 3,352157
P = 50.282,35

Logo, o valor do menor investimento é R$ 50.282,35

* Resposta: R$ 50.282,35.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01) Sendo $\dfrac{(1 + i)^n \cdot i}{(1 + i)^n - 1}$ a expressão do fator FPR, calcule o FPR em cada item abaixo:

a) para i = 5% e n = 4
b) para i = 4% e n = 5
c) para i = 7% e n = 3

02) Sendo $\dfrac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n \cdot i}$ a expressão do fator FRP, calcule o FRP em cada item abaixo:

a) para i = 4% e n = 3
b) para i = 6% e n = 5
c) para i = 7% e n = 4

03) Um imóvel no valor de R$ 8.000,00 é financiado em 4 parcelas mensais iguais com uma taxa de 5% a.m. Determine o valor das parcelas a pagar.

04) Um financiamento é feito em 5 parcelas mensais iguais . Sendo a taxa efetiva de 7% a.m. determine o valor das parcelas para um financiamento de R$ 5.400,00

05) Uma loja financia eletrodomésticos em 7 parcelas mensais iguais. Obtendo lucro a taxa de 6% a.m., determine:
a) as prestações de uma geladeira que custa R$ 1.700,00
b) as prestações de uma TV que custa R$ 1.300,00
c) as prestações para uma mesa que custa R$ 900,00

06) Um imóvel é avaliado no valor de R$ 1.700,00. Desejo comprá-lo em 6 parcelas mensais iguais, sem entrada, acrescidos juros de 4% a.m.. Determine:
a) o valor das prestações a pagar.
b) o valor nominal do imóvel equivalente após serem pagas todas as prestações.
c) se eu pagar até a 2ª prestação e atrasar as demais, quanto pagarei no vencimento da última prestação, prestando contas com os juros de 4%a.m. ?

07) Financiando um bem no valor de R$ 1.800,00 em 5 parcelas mensais iguais a taxa de 7% por mês, qual será:
a) o valor das prestações ?
b) o valor nominal do imóvel equivalente após serem pagas todas as prestações ?
c) o valor do pagamento se todas as parcelas forem pagas na data de vencimento da última prestação a mesma taxa de 7% ?

08) Um financiamento foi efetuado a taxa de 6% a.m. para ser pago em 7 parcelas iguais a R$ 700,00. Qual o valor do financiamento ?

09) Quanto se deve aplicar hoje a uma taxa de 10% a.m. para receber R$ 12.000,00 por mês no final de cada um dos próximos 6 meses ?

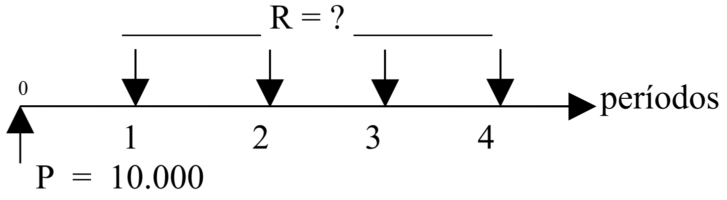
10)Financiado a uma taxa de 17%a.m. um imóvel foi pago em 7 parcelas mensais iguais a R$ 1.700,00. Determine o valor do imóvel financiado.

11) Uma instituição bancária paga juros de 3% a.m. sobre aplicações efetuadas. Quanto devo aplicar nesse banco para receber R$ 950,00 por mês, no final de cada um dos próximos 4 meses ?

12) Um investimento foi realizado a uma taxa de 9% a.m. Sabendo que as aplicações mensais iguais são de R$ 850,00 , determine:
a) o valor do investimento no prazo de 4 meses.
b) o valor do investimento no prazo de 6 meses.

13) Qual o menor investimento que devemos fazer hoje a uma taxa de 17% a.m. para receber R$ 16.500,00 no final de cada um dos próximos 5 meses ?

14) O diagrama abaixo representa o fluxo de caixa de um financiamento.

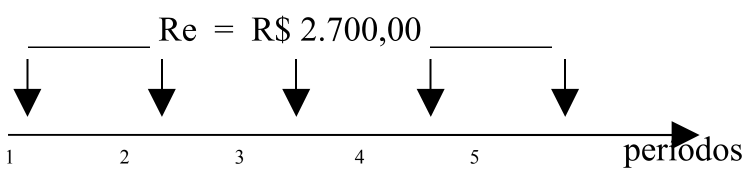


Sendo a taxa envolvida no financiamento de 7% no período, determinar:
a) o valor das parcelas do financiamento.
b) o valor nominal equivalente do financiamento pago pelas 4 (quatro) parcelas.

15) Uma loja financia eletrodomésticos em 6 pagamento mensais iguais, sem entrada, com juros de 5% no período. Calcule:
a) o valor das prestações para uma TV avaliada em R$ 1.700,00
b) o valor de uma geladeira se for paga com prestações iguais de R$ 570,00

16) O financiamento de um imóvel no valor de R$ 1.900,00 em 4 parcelas mensais iguais com taxa de 7% no período teve todas as suas prestações atrasadas exclusive a 4ª e última. Sendo suas prestações atrasadas reajustadas para pagamento na data de vencimento da quarta e última parcela, qual o valor a pagar no final ?

17) O diagrama abaixo representa o fluxo de caixa de um financiamento com prestações de entrada.



Sendo a taxa de financiamento de 6,5% no período, calcular o valor do financiamento.

18) Uma loja financia eletrodomésticos em 5 parcelas mensais iguais, com entrada, a taxa de 6% no período. Calcular:
a) o valor da entrada para um fogão no valor de R$ 800,00
b) o preço de uma mesa, com entrada de R$ 100,00

04) FINANCIAMENTOS SEM ENTRADA E COM ENTRADA

4.1 - Os Fatores FPR e FRP:

Os fatores multiplicativos **FPR** e **FRP** calculam o valor de um financiamento **P** dividido em **n** parcelas iguais a **R** ou calculam o valor das prestações **R** que um investimento **P** foi efetuado, ambos em função de uma taxa **i** e a um prazo **n**.

Os fatores FPR e FRP são usados em situações inversas. O fator FPR é o inverso do fator FRP, o que podemos utilizar qualquer das expressões para o cálculo de P ou R. Vejamos:

a) Dado P para achar R, usamos a expressão R = P . FPR

b) Dado R para achar P, usamos a expressão P = R . FRP

Podemos utilizar qualquer das duas expressões para o cálculo do valor financiado P ou das prestações R do valor financiado. Isso vem demonstrar também que os fatores FPR e FRP são inversos entre si. Vejamos:

$R = P \, . \, FPR \rightarrow FPR = R / P$ $\qquad R / P \neq P / R$

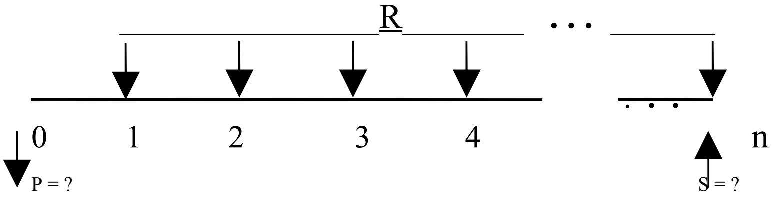
$P = R \, . \, FRP \rightarrow FRP = P / R$ $\qquad$ Mas que: $R / P = \dfrac{1}{P / R}$

Logo, podemos ver que: FPR = 1 / FRP ou FRP = 1 / FPR

4.2 - Financiamentos Sem Entrada:

Os fatores FPR ou FRP envolvem situações de financiamentos sem entrada. No financiamento sem entrada, a primeira parcela não é paga no ato da negociação do investimento. As parcelas são pagas após ter decorrido o 1º período no prazo de financiamento. Essa data de negociação do investimento é chamada de data zero(data 0).

Vejamos o diagrama de fluxo de caixa para o financiamento **Sem Entrada:**



No esquema acima, a data zero representa o momento da negociação do investimento (financiamento), mas o pagamento das parcelas teve início na **data 1**. Efetuou-se a negociação na **data 0** e iniciou-se o pagamento na **data 1**, logo o financiamento é **Sem Entrada.**

01) Exemplo: Uma loja financia um bem em 6k prestações mensais iguais a uma taxa de 6% ao mês. Determine:

a) o valor das prestações para um bem de R$ 800,00

b) o valor do bem se for pago em prestações de R$ 200,00

*** Resolução:**

a) Tirando-se os dados do problema, temos: n = 6 meses.

$i = 6\,\% = 0{,}06$
$P = 800$
$R = ?$

$$FPR = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{(1+0{,}06)^6 \cdot 0{,}06}{(1+0{,}06)^6 \cdot 1} = \frac{(1{,}06)^6}{(1{,}06)^6 - 1} = \frac{0{,}085111}{0{,}418517} = 0{,}203363$$

$FPR = 1 / FRP \rightarrow$ $FRP = 1 / FPR$
$FRP = 1 / 0{,}203363$
$FRP = 4{,}917315$

Logo: $FPR = 0{,}203363$
$FRP = 4{,}917315$

Sabemos que:

$P = R \,.\, FRP$
$800 = R \,.\, 4{,}917315$
$R = 800 / 4{,}917315$
$R = 162{,}69$

$R = P \,.\, FPR$
$R = 800 \,.\, 0{,}203363$
$R = 162{,}69$

b) Tirando-se os dados do problema, temos: $n = 6$
$i = 6\,\% = 0{,}06$
$R = 200{,}00$
$P = ?$

$FPR = 0{,}203363$
$FRP = 4{,}917315$

Sabemos que:

$P = R \,.\, FRP$
$P = 200 \,.\, 4{,}917315$
$P = 983{,}46$

$R = P \,.\, FPR$
$200 = P \,.\, 0{,}203363$
$P = 200 / 0{,}203363$
$P = 983{,}46$

02) Exemplo: Um financiamento **sem entrada** foi realizado a taxa de 7 % no período em 5 parcelas iguais. Se o valor financiado foi de R$ 1.200,00 ; qual o valor das prestações ?

*** Resolução:** Do problema, tiramos os dados: $n = 5$
$i = 7\,\% = 0{,}07$
$P = 1.200$
$R = ?$

* Utilizando a expressão do fator FPR , temos:

$$FPR = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{(1+0{,}07)^5}{(1+0{,}07)^5 - 1} = \frac{(1{,}07)^5}{(1{,}07)^5 - 1} = \frac{0{,}098178621149}{0{,}4025517307} = 0{,}24389069$$

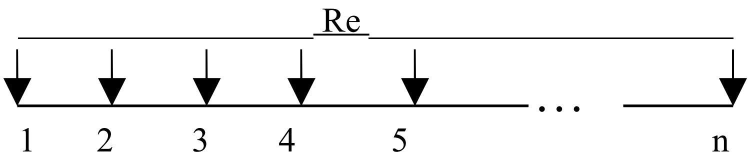
$R = P \,.\, FPR$
$R = 1.200 \,.\, 0{,}24389069$
$R = 292{,}66$

*** Resposta:** O valor das prestações é **R$ 292,66**

4.3 - Financiamento Com Entrada:

No financiamento com entrada, a 1ª parcela é paga no ato da negociação do investimento. Se na data zero for paga a 1ª parcela, a 1ª prestação será chamada de **Entrada** e teremos a data zero como a data 1, pois o pagamento das parcelas começou no ato da negociação do financiamento.

Vejamos o diagrama de fluxo de caixa para o financiamento com entrada:



Nos financiamentos com entrada, chamamos de **Re** as prestações de entrada. As prestações restantes são iguais a Re. Devemos, entretanto, deduzir a expressão para encontrarmos o valor da prestação de entrada Re, pois $Re \neq R$.

Demonstramos anteriormente a expressão do montante S para prestações iguais a R.

Da mesma forma, vamos deduzir a expressão do montante S para prestações iguais a Re.

Observe que se tivesse que pagar todas as prestações na data da última prestação, os reajustes de cada parcela seriam da seguinte forma:

1º parcela reajustada $\rightarrow$ $S_1 = Re.(1 + i)^{n-1}$
2º parcela reajustada $\rightarrow$ $S_2 = Re.(1 + i)^{n-2}$
3º parcela reajustada $\rightarrow$ $S_3 = Re.(1 + i)^{n-3}$
.
.
.
n-ésima parcela reajustada $\rightarrow$ $S_n = Re.(1 + i)^1$

Vemos que todas as parcelas reajustadas serão pagas na data n, sendo dado pela soma dos reajustes. Assim:

$S = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n$ $\rightarrow$ Valor total das parcelas reajustadas.

Verificamos que a expressão acima (das prestações reajustadas) representam a soma dos termos de uma P.G. dada por: $\mathbf{Sn = \dfrac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}}$

Fazendo a equivalência, temos:

$a_1 = Re.(1 + i)$ $\rightarrow$ corresponde ao 1º termo da P.G. ou a 1ª prestação Re a ser paga.

$q = (1 + i)$ $\rightarrow$ corresponde a razão da P.G. ou ao fator de reajuste das prestações Re de uma data para outra.

n $\rightarrow$ número de termos da P.G. ou número de parcelas ou período de financiamento.

$Sn = S$ $\rightarrow$ corresponde a soma dos termos da P.G. ou ao montante no final do período após os reajustes de cada prestação.

A expressão do montante fica definida por:

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{Re.(1 + i).[(1 + i)^n - 1]}{(1 + i) - 1} \rightarrow \quad \mathbf{S = \frac{Re.(1 + i)[(1 + i)n - 1]}{i}}$$

A expressão $\mathbf{\frac{(1 + i)[(1 + i)n - 1]}{i}}$ é chamada de fator multiplicativo de Re para S, ou seja, **FReS**. É o fator que dada a prestação de entrada **Re** podemos achar o montante **S**. O fator **FReS** depende apenas dos parâmetros **i** e **n**. Assim temos:

$$\boxed{\mathbf{FReS_{(i,n)} = \frac{(1 + i)[(1 + i)n - 1]}{i}}} \rightarrow \text{ fator de } \mathbf{Re} \text{ para } \mathbf{S.}$$

Queremos então deduzir a expressão do fator de financiamento **com entrada** a partir do valor das prestações sem entrada. Vamos estabelecer a relação entre **R** e **Re,** ou seja, da P encontrar Re, e vice-versa.

O montante para as prestações R é: $S = \frac{R.[(1 + i)^n - 1]}{i}$ **(1)**

O montante para as prestações Re é: $S = \frac{Re.(1 + i).[(1 + i)n - 1]}{i}$ **(2)**

Pelo princípio de equivalência financeira, temos: **(1) = (2)** , então:

$$S = S \rightarrow \frac{R.[(1 + i)^n - 1]}{i} = \frac{Re.(1 + i).[(1 + i)n - 1]}{i} \rightarrow R = Re.(1 + i)$$

$$\mathbf{Re = R / (1 + i)}$$

A expressão Re = R / (1 + i) relaciona a prestação **sem entrada R** com a prestação **com entrada Re.**

Então, dado o financiamento **P** para achar a prestação sem entrada **R** usamos o fator **FPR**. Encontrada o valor da prestação **R**, para achar a prestação de entrada **Re**, usamos a expressão **Re = R / (1 + i)**

Então: $$\boxed{\mathbf{Re = \frac{R}{(1 + i)}}}$$

01) Exemplo: Um aparelho de som está avaliado em R$ 8.000,00 . Financiando a prazo com juros de 7 % a.m. em 4 parcelas, determine:

a) o valor das prestações para um financiamento **sem entrada.**

b) o valor das prestações para um financiamento **com entrada.**

c) o diagrama de fluxo de caixa para ambos os casos (sem entrada e com entrada).

d) se se atrasasse as prestações quanto se pagaria, a mesma taxa, na data da última prestação ?

*** Resolução:** Tomando-se os dados do problema, temos: P = 8.000
n = 4 meses
i = 7 % = 0,07

a) R é o valor das prestações sem entrada. Logo usamos a expressão: **R = P . FPR**

$$FPR_{(7\%,4)} = \frac{(1+0{,}07)^4 \cdot 0{,}07}{(1+0{,}07)^4 - 1} = \frac{(1{,}07)^4}{(1{,}07)^4 - 1} = \frac{0{,}091755}{0{,}310796} = 0{,}295225$$

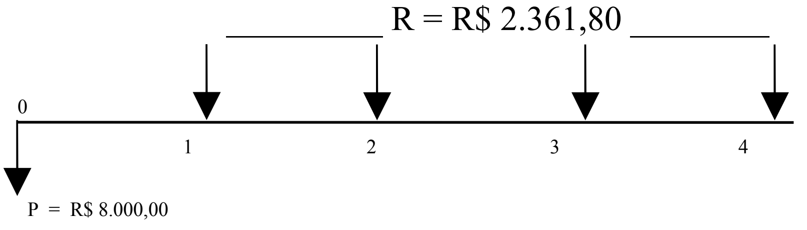
$R = P \cdot FPR$
$R = 8.000 \times 0{,}295225$
$\mathbf{R = 2.361{,}80}$

b) Re é o valor das prestações com entrada. Logo, usamos a expressão:

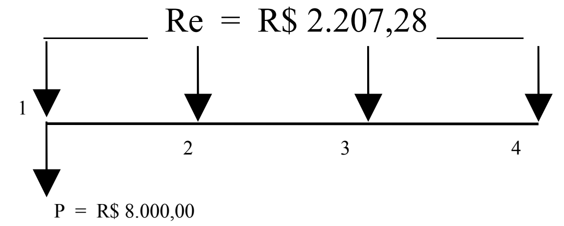
$Re = R / (1 + i)$
$Re = 2.361{,}80 / (1 + 0{,}07)$
$Re = 2.361{,}80 / (1{,}07)$
$\mathbf{Re = 2.207{,}28}$

c) O diagrama de fluxo de caixa é dado a seguir:

* Para o financiamento sem entrada, temos o diagrama:



* Para o financiamento com entrada, temos o diagrama:



d) Se se atrasar as prestações, na data da última prestação pagar-se-á:

* No financiamento sem entrada:

$$S = \frac{R.[(1+i)^n - 1]}{i} = \frac{2.361{,}80 \, . \, [(1+0{,}07)^4 - 1]}{0{,}07} = \mathbf{10.486{,}25}$$

* No financiamento com entrada:

$$S = \frac{Re.(1+i).[(1+i)^n - 1]}{i} = \frac{2.207{,}28.(1+0{,}07).[(1+0{,}07)^4 - 1]}{0{,}07} = \mathbf{10.486{,}18}$$

Conforme os resultados obtidos, comprovamos a equivalência que existe entre os dois modos de financiamentos. Os planos de financiamentos **sem entrada** e **com entrada** ficam, portanto, a escolha do investidor.

02) Exemplo: Um financiamento foi efetuado a taxa de 8% por período em 5 parcelas com entrada de R$ 250,50 no ato da negociação. Determine:

a) o fluxo de caixa para o financiamento com entrada.

b) o valor das prestações se o financiamento fosse sem entrada.

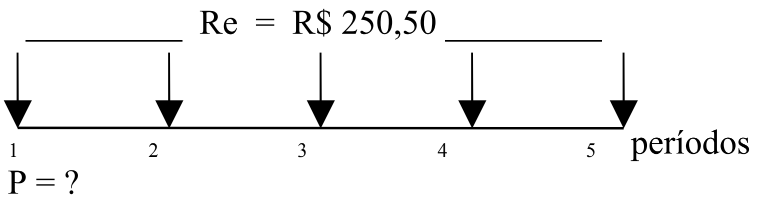
c) o valor do financiamento.

*** Resolução:** Tirando-se os dados do problema, temos: Re = 250,50

i = 8% = 0,08

n = 5

a) o diagrama de fluxo de caixa para o financiamento **com entrada** é dado a seguir:



b) se o financiamento fosse **sem entrada,** o valor das prestações seriam:

$$Re = R / (1 + i) \rightarrow 250{,}50 = R / (1 + 0{,}08)$$

$$R = 250{,}50 \times (1{,}08)$$

$$\mathbf{R = 270{,}54}$$

c) o valor do financiamento é dado por: **P = R . FRP**

$$FRP_{(8\%,\,5)} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} = \frac{(1{,}08)^5 - 1}{(1{,}08)^5 \cdot 0{,}08} = 3{,}992709$$

$$P = 270{,}54 \cdot (3{,}992709)$$

$$\mathbf{P = 1.080{,}18}$$

*** Respostas**: a) vide resolução b) R$ 270,54 c) R$ 1.080,18

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01) Um financiamento é feito em 5 parcelas mensais iguais sem entrada a uma taxa de 7% a.m. Determine o valor do financiamento.

02) Um móvel é financiado em 6 parcelas iguais sem entrada a uma taxa de 5% a.m. Sendo o valor do imóvel a financiar de R$ 1.350,00 ; determine o valor das prestações.

03) Uma loja financia um bem em 7 prestações mensais iguais sem entrada a uma taxa de 4,5% a.m. Determinar:

a) o valor do bem se for pago em prestações de R$ 250,00

b) o valor das prestações para um bem no valor de R$ 1.750,00

04) Um eletrodoméstico está avaliado em R$ 560,00. Financiado a prazo com juros de 6,5% a.m. em 6 parcelas mensais iguais com entrada, determinar o valor das prestações de entrada.

05) Um bem está avaliado no valor de R$ 750,00. Sendo financiado a prazo em 4 parcelas iguais a uma taxa de juros em 5,5% a.m. , determinar:

a) o valor das prestações se for financiado sem entrada.
b) o valor das prestações se for financiado com entrada
c) o diagrama de fluxo de caixa para ambos os casos(sem entrada e com entrada)

06) Financiando-se um imóvel no valor de R$ 1.800,00 a prazo em 5 parcelas mensais iguais, com entrada, a juros de 7,5%, qual seria o valor das prestações de entrada ?

07) Um bem avaliado em R$ 1.850,00 é financiado a prazo em 4 parcelas mensais iguais a juros de 6,7% a.m. Determine:

a) o valor das prestações para o financiamento sem entrada.
b) o valor das prestações para o financiamento com entrada.
c) o diagrama de fluxo de caixa para ambos os casos (sem entrada e com entrada).

08) Um financiamento foi efetuado a taxa de 7,5% por período em 6 parcelas iguais com entrada de R$ 350,00 no ato da negociação. Determine:

a) o valor das prestações se o financiamento fosse sem entrada.
b) o valor do financiamento.
c) se se atrasasse todas as parcelas e querendo pagá-las na data do vencimento da última parcela, quanto seria pago ?

09) Um bem avaliado no valor de R$ 1.650,00 foi financiado em 5 parcelas iguais e uma taxa de 14,7% a.m. com entrada no ato da negociação. Determine:

a) o valor das parcelas se o financiamento fosse sem entrada.
b) o fluxo de caixa para o financiamento sem entrada.
c) o valor das prestações de entrada.
d) o fluxo de caixa para o financiamento com entrada.
e) caso se quisesse pagar todas as parcelas de só vez na data de vencimento da última parcela mas com taxa de juros combinada em 15% a.m., qual seria o valor a ser pago ?

10) Um financiamento foi realizado a taxa de 7,7% a.m. em 3 parcelas iguais, com entrada de R$ 450,00 no ato da negociação. Determinar:

a) o diagrama de fluxo de caixa para o financiamento com entrada.
b) o valor das prestações se o financiamento fosse sem entrada.
c) o diagrama de fluxo de caixa se o financiamento fosse sem entrada.
d) o valor do financiamento.
e) caso se quisesse liquidar todas as parcelas de uma só vez na data de vencimento da última prestação mas com taxa de juros combinada para 8,5% , qual seria o valor a ser pago ?

11) Uma loja financia eletrodomésticos em 5 prestações mensais iguais a uma taxa de 7,5% a.m. Determine:

a) o valor das prestações de uma TV no valor de R$ 870,00, sem entrada.
b) o valor de uma geladeira se for paga, com entrada de R$ 250,00

12) Uma loja financia eletrodomésticos a prazo em 4 prestações iguais com uma taxa de juros em 4,7% a.m. Determine:

a) o valor de uma TV se for comprada com entrada de R$ 150,00
b) as prestações de um aparelho de som avaliado em R$ 875,00 ; sem entrada.

13) Um imóvel avaliado em R$ 950,00 é financiado a prazo em 3 parcelas mensais iguais a uma taxa de juros em 3,7% a.m. Calcule:

a) o valor das prestações se for negociado sem entrada.
b) o valor das parcelas se for financiado com entrada.
c) o diagrama de fluxo de caixa para ambos os casos(sem entrada e com entrada).

14) Um bem avaliado no valor de R$ 1.200,00 foi financiado em 6 parcelas mensais iguais a uma taxa de 10% a.m. com entrada no ato da negociação. Determine:

a) o valor das prestações se o financiamento fosse sem entrada.
b) o valor das prestações de entrada.
c) caso se quisesse pagar todas as parcelas do financiamento de uma só vez na data de vencimento da última prestação, mas com taxa de juros combinada em 12% a.m., qual será o valor a pagar ?

15) Um financiamento pode ser realizado a uma taxa de 6,5% a.m. em 4 parcelas iguais sem entrada. Mas se eu quisesse entrar com R$ 450,00 ; qual seria o valor do financiamento ?

16) Deseja-se financiar um bem a uma taxa de 4,4% a.m. em 4 parcelas mensais iguais, com entrada de R$ 540,00. Determinar:

a) o valor das prestações se eu quisesse comprá-lo sem entrada.
b) o valor do bem financiado.

17) O financiamento de um bem no valor de R$ 1.300,00 pode ser liquidado em 4 parcelas iguais com juros de 7,5% no período. Determinar:

a) o diagrama de fluxo de caixa para o financiamento sem entrada.
b) o diagrama de fluxo de caixa para o financiamento com entrada.

05) PLANOS EQUIVALENTES DE FINANCIAMENTOS:

Neste capítulo, veremos o conceito de equivalência de fluxo de caixa em planos distintos de financiamentos, ou seja, cada plano apresenta uma modalidade de pagamento, mas que se equivalem numa data considerada, conforme o princípio de equivalência financeira.

Nos itens a seguir, mostraremos cinco planos equivalentes de financiamentos que envolvem o acréscimo de juros sobre cada parcela de financiamento bem como o valor da amortização (abatimento) sobre cada parcela reajustada. Em seguida, faremos um breve estudo sobre os três sistemas de financiamentos mais importantes: PRICE, SAC e SAM. Todos os cálculos serão feitos a base de juros compostos.

5.1 - Cinco Planos Equivalentes de Financiamentos:

Mostraremos neste item que um financiamento poderá ser efetuado por qualquer dos planos a seguir:

Plano - I: Pagamento do Financiamento no Final;
Plano - II: Pagamento Periódico de Juros;
Plano - III: Pagamento em Prestações Iguais - Sistema Price;
Plano - IV: Sistema de Amortização Constante - SAC;
Plano - V: Pagamento com Prestações Crescentes em Progressão Geométrica.

Vejamos as modalidades de cada plano para solução de um mesmo problema.

01) Exemplo: Um financiamento sem entrada de R$ 7.000,00 foi efetuado em 4 parcelas a taxa de 5% no período. Qual o valor de cada parcela a pagar ?

*** Pelo Plano - I: Pagamento no Final:**

Neste plano, o financiamento é pago no final do período, ou seja, ao fim das quatro parcelas, sendo os juros capitalizados período a período (mês a mês, ano a ano, etc.).

Neste plano, usamos a expressão geral do montante para pagar tudo no final.

$S = P.(1 + i)^n \rightarrow S = ?$

$P = 7.000 \qquad S = 7.000 . (1 + 0,05)^4$

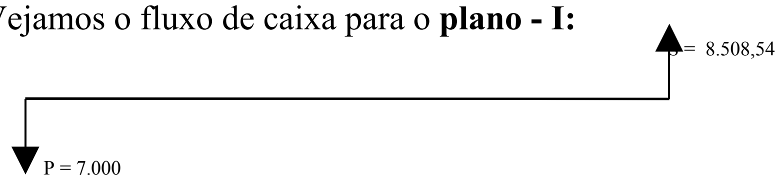
$n = 4 \qquad S = 7.000(1,05)^4$

$i = 5\% = 0,05 \qquad S = 7.000 \text{ x } 1,215506$

$\mathbf{S = 8.508,54}$

Logo, temos que pelo plano de Pagamento no Final, o financiamento de R$ 7.00,00 será pago em uma única parcela de R$ 8.508,54 no final do quarto período.

Vejamos o fluxo de caixa para o **plano - I:**



* Resposta: O valor da parcela a pagar pelo plano - I é **R$ 8.508,54**

*** Pelo Plano - II: Pagamento Periódico de Juros:**

Neste plano, os juros não são capitalizados ao fim de cada período, pois ao final de cada período os juros são pagos (amortizados, abatidos) até o final do financiamento. Note então que ao final de cada parcela são pagos apenas os juros do período e ao fim da última parcela serão pagos os juros devidos mais o valor financiado.

Neste plano, usamos a expressão **J = P . i** para o cálculo dos juros em cada período.

Logo:

Na 1ª parcela pargar-se-á: $J_1 = 7.000 \text{ x } 0,05 \rightarrow J_1 = 350,00$

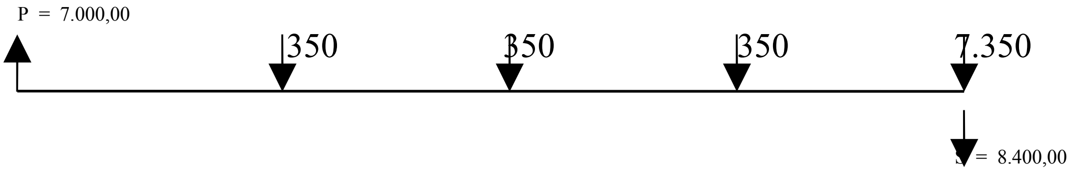
Na 2ª parcela pargar-se-á: $J_2 = 7.000 \text{ x } 0,05 \rightarrow J_2 = 350,00$

Na 3ª parcela pargar-se-á: $J_3 = 7.000 \text{ x } 0,05 \rightarrow J_3 = 350,00$

Na 4ª (última) parcela pargar-se-á: $P + J_4 = 7.000 + 350,00 = 7.350$

Logo, vemos que no plano de Pagamento Periódico de Juros o financiamento de R$ 7.000,00 será pago por: 350 + 350 + 350 + (7.000 + 350) = 8.400 ou R$ 8.400,00 no final do quarto período.

Vejamos o diagrama de fluxo de caixa para o plano - II:



* Resposta: O valor de cada parcela é $R_1 = 350,00$

$R_2 = 350,00$

$R_3 = 350,00$
$R_4 = 7.350,00$

*** Pelo Plano - III: Prestações Iguais - Sistema Price:**

Neste plano, o financiamento é pago em 4 parcelas iguais, de forma que já estão incluídas nestas parcelas os juros acrescidos e a amortização devida. Este plano também é conhecido como Sistema Price.

Para calcularmos as prestações iguais a R da o financiamento P, usamos a expressão do fator FPR. Vejamos:

Do problema, temos: $P = 7.000$
$n = 4$
$i = 5\%$
$R = ?$

$$FPR = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

$R = P \cdot FPR$

$$R = \frac{P.(1+I)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

$$R = \frac{7.000.(1+0,05)^4 \cdot 0,05}{(1+0,05)^4 - 1}$$

$R = 1.972,60$

No plano Price, o financiamento de R$ 7.000,00 será pago em 4 parcelas iguais a R$ 1.972,60. O valor das prestações também pode ser obtido com ajuda das tabelas financeiras.

Os juros sobre o valor a pagar é dado por: $\mathbf{J = P \cdot i}$

Como nas prestações já estão incluídas os juros e a amortização, então é válida a relação:

PRESTAÇÃO = AMORTIZAÇÃO + JUROS $\longrightarrow$ **R = A + J**

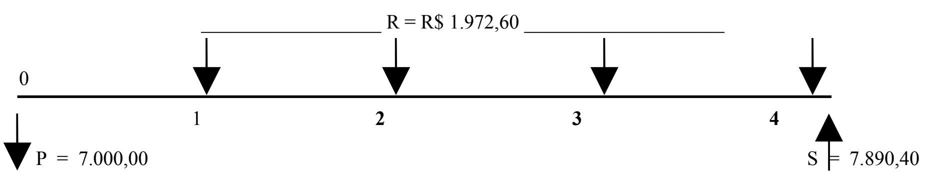
Então os juros acrescidos na 1ª parcela é dado por: $J_1 = 7.000 \times 0,05$
$J_1 = 350,00$

A amortização incluída na 1ª prestação é dada por: $R = A + J$
$1.972,60 = A + 350$
$A = 1.972,60 - 350$
$\mathbf{A = 1.622,60}$

Vemos que todas as 4 parcelas são iguais a R$ 1.972,60.

Logo, o financiamento de R$ 7.000,00 será pago ao fim da 4ª parcela no valor de R$ 7.890,40

Vejamos o diagrama de fluxo de caixa para o financiamento no plano Price:



*** Resposta:** O valor de cada parcela a pagar é: R$ 1.972,60

*** Pelo Plano - IV: Sistema de Amortização Constante:**

Neste plano, as prestações não serão iguais. Serão iguais as amortizações em cada parcela. Sendo a amortização constante, o valor da amortização será igual em cada período para parcela a ser descontada.

O valor da amortização neste plano é obtido dividindo-se o valor principal financiado (P) pelo número de parcelas (n). Assim sendo, a amortização é dada por:

$$\boxed{\mathbf{A = P / n}}$$

Para o nosso Exemplo, temos que P = 7.000 e n = 4, logo o valor de A será:

A = P / n
A = 7.000 / 4
A = 1.750,00 $\rightarrow$ valor amortizado, abatido em cada parcela.

Para calcularmos cada prestação ainda é válida a relação:

PRESTAÇÃO = AMORTIZAÇÃO + JUROS $\rightarrow$ R = A + J

Os juros acrescidos sobre o valor a pagar P é dado por: **J = P . i**

➔ A 1ª parcela é obtida da seguinte forma: **R = A + J**
Os juros sobre o valor principal P é obtido por: J = 7.000 x 0,05
J = 350,00

Logo, o valor da 1ª parcela é: $R_1 = A + J$
$R_1 = 1.750 + 350$
$\mathbf{R_1 = 2.100,00}$

* A 1ª parcela de R$ 2.100,00 desconta o valor de R$ 7.350,00 (principal + juros).
E o restante a pagar após descontada a 1ª parcela é: 7.350 - 2.100 = **5.250,00**

➔ A 2ª parcela é obtida da seguinte forma: **R = A + J**
Os juros sobre o restante a pagar R$ 5.250,00 é obtido por: J = 5.250 x 0,05
J = 262,50

Logo, o valor da 2ª parcela é: $R_2 = A + J$
$R_2 = 1.750 + 262,50$
$\mathbf{R_2 = 2.012,50}$

* A 2ª parcela de R$ 2.012,50 desconta o valor de R$ 5.512,50 (restante + juros).
E o restante a pagar após a 2ª parcela descontada é: 5.512,50 - 2.012,50 = **3.500,00**

➔ A 3ª parcela é obtida da seguinte forma: **R = A + J**
Os juros sobre o restante a pagar R$ 3.500,00 é obtido por: J = 3.500 x 0,05
J = 175,00

Logo, o valor da 3ª parcela é: $R_3 = A + J$

$R_3 = 1.750 + 175{,}00$

$\mathbf{R_3 = 1.925{,}00}$

* A 3ª parcela de R$ 1.925,00 desconta o valor de R$ 3.675,00 (restante + juros)
E o valor restante a pagar após descontada a 3ª parcela é: 3.675 - 1.925 = **1.750**

➔ A 4ª parcela é obtida da seguinte forma: $\mathbf{R = A + J}$
Os juros sobre o restante a pagar R$ 1.750,00 é obtido por: $J = 1.750 \times 0{,}05$

$J = 87{,}50$

Logo, o valor da 4ª parcela é: $R_4 = A + J$

$R_4 = 1.750 + 87{,}50$

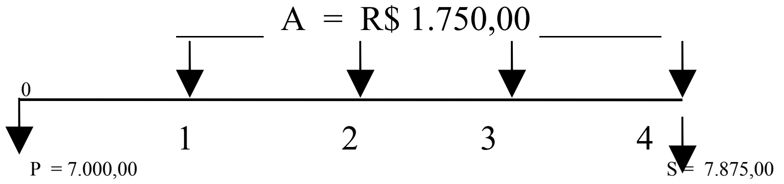
$\mathbf{R_4 = 1.837{,}50}$

* A 4ª parcela de R$ 1.837,50 desconta o valor de R$ 1.837,50 (restante + juros).
E o restante a pagar após descontada a 4ª parcela é: 1.837,50 - 1.837,50 = 0
Note que a 4ª parcela de R$ 1.837,50 liquida totalmente o restante a pagar do financiamento.

Observe também abaixo o valor de cada parcela paga:

1ª parcela é: $R_1 = 2.100{,}00$
2ª parcela é: $R_2 = 2.012{,}50$
3ª parcela é: $R_3 = 1.925{,}00$
4ª parcela é: $\underline{R_4 = 1.837{,}50}$
Total pago → **R$ 7.875,00**

No plano SAC, o financiamento de R$ 7.000,00 será pago no valor equivalente de R$ 7.875,00 em 4 prestações distintas com amortização constante de R$ 1.750,00 .
Fazendo o diagrama de fluxo de caixa para o financiamento no plano SAC, temos:



* **Resposta:** O valor de cada parcela a pagar é: $R_1 =$ R$ 2.100,00

$R_2 =$ R$ 2.012,50

$R_3 =$ R$ 1.925,00

$R_4 =$ R$ 1.837,50

*** Pelo Plano - V: Prestações Crescentes em Progressão Geométrica:**

Neste plano, o financiamento de R$ 7.000,00 será liquidado através do pagamento das quatro parcelas cujos valores estão em progressão geométrica, cuja razão é **(1 + i).**

Para se obter o valor de cada prestação basta dividir o saldo devedor no final do período pelo nº de parcelas que faltam ser pagas. Assim para cada parcela, temos:

Dessa forma, o valor das parcelas é obtido do seguinte modo:

1) Saldo devedor para a 1ª parcela: 7.000 x (1 + 0,05) = 7.350,00
Número de prestações a pagar: 4
Valor da 1ª prestação a pagar: 7.350 / 4 = **1.837,50**

Após ser paga a 1ª prestação, o restante a pagar será: 7.350 - 1.837,50 = 5.512,50

2) O saldo devedor para a 2ª parcela a pagar é: 5.512,50 x (1 + 0,05) = 5.788,12
Número de prestações a pagar: 3
Valor da 2ª prestações é: 5.788,12 / 3 = **1.929,37**

Após ser paga a 2ª prestação, o restante a pagar é: 5.788,12 - 1.929,37 = 3.858,75

3) O saldo devedor para a 3ª parcela a pagar é: 3.858,75 x (1 + 0,05) = 4.051,68
Número de prestações a pagar: 2
Valor da 3ª prestação é: 4.051,68 / 2 = 2.025,84

Após ser paga a 3ª a parcela, o restante a pagar é: 4.051,68 - 2.025,84 = 2.025,84

4) O saldo devedor para a 4ª parcela a pagar é: 2.025,84 x 91 + 0,05) = 2.127,13
Número de prestações a pagar é: 1
Valor da 4ª parcela é: 2.127,13 / 1 = 2.127,13

Após ser paga a 4ª parcela, o restante a pagar é: 2.127,13 - 2.127,13 = 0

Logo, vemos que no final do financiamento, a 4ª parcela liquida o valor financiado.

Por outro lado, como as prestações a pagar estão todas em progressão geométrica, cada prestação são termos da P.G. Como a razão da P.G. é dada por (1 + i), basta encontrar o valor da 1ª prestação e multiplicar pela razão para encontrar o valor das prestações seguintes.
Dessa forma, o valor das prestações é obtido do seguinte modo:

Valor da 1ª prestação R_1 :
Saldo devedor para a 1ª prestação : 7.000 x (1 + 0,05) = 7.350,00
Número de prestações a pagar: 4
Valor da 1ª prestação é: 7.350 / 4 = 1.837,50

Logo, o valor da 1ª prestação é: $\mathbf{R_1 = 1.837,50}$
A razão é dada por: q = (1 + 0,05) = (1,05)

O valor da 2ª prestação é:
$R_2 = q \cdot R_1$
$R_2 = 1,05 \times 1.837,50$
$\mathbf{R_2 = 1.929,37}$

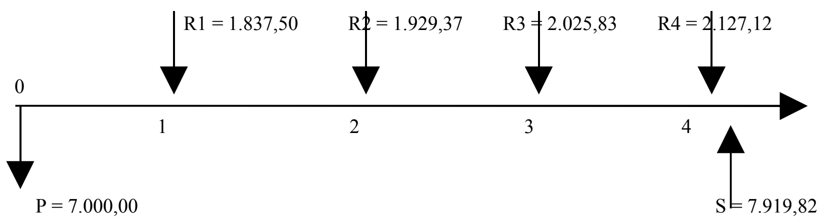
O valor da 3ª prestação é:

$R_3 = q \cdot R_2$
$R_3 = 1,05 \times 1.929,37$
$\mathbf{R_3 = 2.025,83}$

O valor da 4ª prestação é:
$R_4 = q \cdot R_3$
$R_4 = 1,05 \times 2.025,83$
$\mathbf{R_4 = 2.127,12}$

No plano de financiamento com prestações em P.G. o valor financiado de R$ 7.000,00 será pago no final do investimento no valor equivalente de R$ 7.919,82 correspondente ao pagamento das 4 parcelas (prestações).

Fazendo o diagrama de fluxo de caixa para o financiamento de prestações em P.G., temos:



*** Resposta:** O valor de cada prestação a pagar é: $R_1 = 1.837,50$
$R_2 = 1.929,37$
$R_3 = 2.025,83$
$R_4 = 2.127,12$

*** Observação:**

Vamos expor no quadro abaixo o valor total pago, ou valor equivalente, do financiamento de R$ 7.000,00 em cada plano:

Financiamento	Planos	Total Pago (Equivalente)
R$ 7.000,00	**I**	R$ 8.508,54
R$ 7.000,00	**II**	R$ 8.400,00
R$ 7.000,00	**III**	R$ 7.890,40
R$ 7.000,00	**IV**	R$ 7.875,00
R$ 7.000,00	**V**	R$ 7.919,82

Os cinco planos de financiamentos são absolutamente equivalentes a uma taxa de 5% para um mesmo prazo de 4 parcelas, não se devendo pois analisá-los pelos seus valores absolutos, mas sim, conforme o **princípio de equivalência financeira** e pelo fato de que o débito final ter sido pago em todos os quatro planos com a liquidação da última parcela.

02) Exemplo: Um imóvel avaliado em R$ 8.500,00 é financiado em 5 parcelas a taxa de 6% no período. Sendo o financiamento realizado pelo sistema de prestações iguais (Sistema Price), determine:

a) o valor de cada parcela a pagar.
b) os juros embutidos na 1ª parcela paga.
c) o valor amortizado (a amortização) na 2ª parcela paga.

*** Resolução:** Do problema tiramos os dados: $P = 8.500$
$n = 5$

$i = 6\ \% = 0{,}06$
$R = ?$

a) Sendo financiado pelo Price, em prestações iguais, o valor de cada prestação **R** dado o financiamento **P,** é calculado pela expressão do fator **FPR**. Vejamos:

$$FPR = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{(1+0{,}06)^5 \cdot 0{,}06}{(1+0{,}06)^5 - 1} = \frac{(1{,}06)^5 \cdot 0{,}06}{(1{,}06)^5 - 1} = \frac{0{,}080293534656}{0{,}3382255776}$$

$FPR = 0{,}2373964004312$

Utilizamos a expressão $\mathbf{R = P \cdot FPR}$
$R = 8.500 \times 0{,}2373964004312$
$\mathbf{R = 2.017{,}86}$

b) Os juros embutidos na 1ª prestação é dado por: $\mathbf{J_1 = P \cdot i}$
$J_1 = 8.500 \times 0{,}06$
$J_1 = 510{,}00$

c) A 1ª parcela de R$ 2.017,86 desconta o dividendo de R$ 9.010,00 (principal + juros).
O restante a pagar após descontada a 1ª parcela é: 9.010 - 2.017,86 = **R$ 6.992,14**

Os juros embutidos na 2ª parcela a pagar é dado por; $J_2 = 6.992{,}14 \times 0{,}06$
$J_2 = 419{,}52$

A 2ª parcela a pagar é R$ 2.017,86 . Os juros embutidos na 2ª parcela paga é 419,52
Então, podemos usar a relação abaixo:

PRESTAÇÃO = AMORTIZAÇÃO + JUROS $\rightarrow$ $\mathbf{R = A + J}$
$R_2 = A_2 + J_2$
$A_2 = R_2 - J_2$
$A_2 = 2.017{,}86 - 419{,}52$
$\mathbf{A_2 = 1.598{,}34}$

*** Respostas:** a) R = R$ 2.017,86 b) J_1 = R$ 510,00 c) A_2 = R$ 1.598,34

03) Exemplo: Um financiamento de R$ 7.500,00 foi realizado em 4 parcelas, sem entrada, pelo sistema de amortização constante (SAC), a uma taxa de juros de 7% no período.
Determinar:
a) a amortização em cada parcela do financiamento.
b) o valor da 3ª parcela paga.
c) os juros embutidos na 4ª parcela liquidada.

*** Resolução:** Vamos explicitar o financiamento pelo Sistema de Amortização Constante para . respondermos os itens acima.

Do problema tiramos os dados: $P = 7.500$
$n = 4$

$i = 7\% = 0{,}07$

Pelo sistema SAC, as amortizações em cada parcela é calculada pela expressão:
A = P / n , onde: A $\rightarrow$ valor da amortização
P $\rightarrow$ valor do financiamento
n $\rightarrow$ número de parcelas do financiamento
$A = 7.500 / 4$
$A = 1.875{,}00$ $\rightarrow$ valor amortizado em cada parcela do financiamento.

1) Os juros embutidos na 1ª parcela é dado pela expressão: $\mathbf{J_1 = P \cdot i}$

$$J_1 = 7.500 \times 0{,}07$$
$$J_1 = 525{,}00$$

* Sendo a amortização de R$ 1.875,00 ; o valor da 1ª parcela é dado pela relação:

PRESTAÇÃO = AMORTIZAÇÃO + JUROS $\rightarrow$ R = A + J

$$R_1 = A_1 + J_1$$
$$R_1 = 1.875 + 525$$
$$R_1 = 2.400$$

A 1ª parcela de R$ 2.400,00 desconta o valor de R$ 8.025,00 (principal + juros).
O restante a pagar após descontada a 1ª parcela é: 8.025 - 2.400 = **5.625,00**

2) Os juros embutidos na 2ª parcela é dado pela expressão: $J_2 = 5.625 \times 0{,}07$

$$J_2 = 393{,}75$$

* Sendo a amortização de R$ 1.875,00 ; o valor da 2ª parcela é dado pela relação:

PRESTAÇÃO = AMORTIZAÇÃO + JUROS $\rightarrow$ R = A + J

$$R_2 = A_2 + J_2$$
$$R_2 = 1.875 + 393{,}75$$
$$R_2 = 2.268{,}75$$

A 2ª parcela de R$ 2.268,75 desconta o saldo devedor de R$ 6.018,75 (restante + juros). E o restante a pagar após descontada a 2ª parcela é: 6.018,75 - 2.268,75 = **3.750,00**

3) Os juros embutidos na 3ª parcela é dado pela expressão: $J_3 = 3.750 \times 0{,}07$

$$J_3 = 262{,}50$$

* Sendo a amortização de R$ 1.875,00 ; o valor da 3ª parcela é dado pela relação:

PRESTAÇÃO = AMORTIZAÇÃO + JUROS $\rightarrow$ R = A + J

$$R_3 = A_3 + J_3$$
$$R_3 = 1.875 + 262{,}50$$
$$R_3 = 2.137{,}50$$

A 3ª parcela de R$ 2.137,50 desconta o saldo devedor de R$ 4.012,50 (restante + juros).E o restante a pagar após descontada a 3ª parcela é: 4.012,50 - 2.137,50 = **1.875,00**

4) Os juros embutidos na 4ª parcela é dado pela expressão: $J_4 = 1.875 \times 0,07$

$J_4 = 131,25$

* Sendo a amortização de R$ 1.875,00 ; o valor da 4ª parcela é dado pela relação:

PRESTAÇÃO = AMORTIZAÇÃO + JUROS → R = A + J

$R_4 = A_4 + J_4$

$R_4 = 1.875 + 131,25$

$R_4 = 2.006,25$

A 4ª parcela de R$ 2.006,25 desconta o saldo devedor de R$ 2.006,25 (principal + juros). E o restante a pagar após descontada a 4ª parcela é: 2.006,25 - 2.006,25 = **0.**

Note então que ao ser paga a 4ª parcela, o financiamento será inteiramente liquidado.

Agora para respondermos os itens anteriores, basta darmos uma olhada no que foi explicitado pelo Sistema de Amortização Constante (SAC) e verificarmos que:

a) a amortização em parcela do financiamento é: A = R$ 1.875,00
b) o valor da 3ª parcela do financiamento é: R_3 = R$ 2.137,50
c) os juros embutidos na 4ª parcela paga é: J_4 = R$ 131,25

* Respostas: a) A = R$ 1.875,00
b) R_3 = R$ 2.137,50
c) J_4 = R$ 131,25

04) Exemplo: Um imóvel avaliado em R$ 8.500,00 é financiado em 5 parcelas a taxa de 6% no período com prestações crescentes em P.G. Determine:

a) o valor da 2ª prestação paga.
b) os juros embutidos na 3ª prestação paga.
c) a amortização na 4ª parcela do financiamento.

* **Resolução:** As prestações em P.G são calculadas dividindo-se o saldo devedor no final do período pelo número de parcelas que faltam ser pagas. Ou então multiplica-se cada prestação pela razão da P.G. para obter-se as prestações seguintes.

Do problema temos os dados: P = 8.500 ; n = 5 ; i = 6 % = 0,06

$q = (1 + i) \rightarrow q = (1 + 0,06) \rightarrow \mathbf{q = 1,06}$

1) Os juros embutidos na 1ª parcela é dado pela expressão: $\mathbf{J_1 = P \cdot i}$

$J_1 = 8.500 \times 0,06$

$J_1 = 510,00$

* Saldo devedor para a 1ª prestação é: R$ 9.010,00 (principal + juros).
* o número de parcelas a pagar é: 5

* Logo, o valor da 1ª parcela é: **9.010 : 5 = 1.802,00**

* Para o cálculo das prestação seguintes, fazemos:

$\mathbf{R_2 = R_1 \cdot q}$	$\mathbf{R_3 = R_2 \cdot q}$	$\mathbf{R_4 = R_3 \cdot q}$	$\mathbf{R_5 = R_4 \cdot q}$
R_2 = 1.802 x 1,06	R_3 = 1.910,12 x 1,06	R_4 = 2.024,72 x 1,06	R_5 = 2.146,21 . 1,06
R_2 = 1.910,12	R_3 = 2.024,72	R_4 = 2.146,21	R_5 = 2.274,98

* Após ser paga a 1ª prestação, o restante a pagar é: 9.010 - 1.802,12 = **7.207,88**

2) Os juros embutidos na 2ª parcela é dado pela expressão: J_2 = 7.207,88 x 0,06
J_2 = 432,47

* Saldo devedor para a 2ª prestação é: R$ 7.640,35 (restante + juros).
* Após ser paga a 2ª parcela, o restante a pagar é: 7.640,35 - 1.910,12 = **5.730,23**

3) Os juros embutidos na 3ª parcela é dado pela expressão: J_3 = 5.730,33 x 0,06
J_3 = 343,81

* O saldo devedor para a 3ª prestação é: R$ 6.074,14 (restante + juros).
* Após ser paga a 3ª prestação, o restante a pagar é: 6.074,14 - 2.024,72 = **4.049,42**

4) Os juros embutidos na 4ª parcela é dado pela expressão: J_4 = 4.049,42 x 0,06
J_4 = 242,96

* O valor amortizado na 4ª prestação é dado pela relação: $\mathbf{R_4 = A_4 + J_4}$
A_4 = 2.146,21 - 242,96
A_4 = 1.903,35

Observando o desenvolvimento dos cálculos temos que:

a) o valor da 2ª prestação paga é R_2 = R$ 1.910,12
b) os juros embutidos na 3ª prestação paga são J_3 = R$ 343,81
c) o valor amortizado na 4ª prestação do financiamento é A_4 = R$ 1.903,35

* Respostas: a) R_2 = R$ 1.910,12 b) J_3 = R$ 343,81 c) A_4 = R$ 1.903,35

05) Exemplo: O financiamento de um imóvel avaliado em R$ 9.500,00 é feito em 6 parcelas, com entrada, a uma taxa de 8% no período.
Determinar:

a) o valor da 1ª parcela de entrada, os juros embutidos e a amortização da 1ª parcela, pelo financiamento de prestações iguais (Price). Faça o diagrama de fluxo de caixa.

b) o valor da 2ª parcela, os juros embutidos e a amortização na 2ª parcela pelo sistema SAC. Faça o diagrama de fluxo de caixa.

c) o valor das prestações pelo plano de pagamento periódico de juros. Faça o diagrama de fluxo de caixa.

d) Sendo o financiamento efetuado em prestações crescentes em P.G., qual o valor das parcelas ?

* Resolução:

a) Pelo sistema Price - sistema de prestações iguais, as prestações são dadas pela expressão do fator FPR. Do problema tiramos os dados: $P = 9.500$

$n = 6$

$i = 8\ \% = 0{,}08$

$R = ?$

$Re = ?$ $\rightarrow$ prestação de entrada.

Temos que $Re = R / (1 + i)$, onde: $R = P \,.\, FPR$

$$FPR(\,8\%, 6\,) = \frac{(1 + 0{,}08)^6 \,.\, 0{,}08}{(1 + 0{,}08)^6 - 1} = \frac{(1{,}08)^6 \,.\, 0{,}08}{(1{,}08)^6 - 1} = 0{,}2163153$$

Logo, $R = P \,.\, FPR$

$R = 9.500 \times 0{,}2163153$

$R = 2.055{,}00$

$Re = R / (1 + i)$

$Re = 2.055{,}00 / (1 + 0{,}08)$

$Re = 2.055 / (1{,}08)$

$Re = 1.902{,}77$

Os juros embutidos na 1ª parcela é dado por: $\mathbf{J_1 = P \,.\, i}$

$J_1 = 9.500 \times 0{,}08$

$J_1 = 760$

Como nas prestações já estão incluídas os juros e a amortização, então é válida a relação: $R = A + J$ ou $\mathbf{Re = A + J}$

O valor da amortização é: $Re = A + J$

$A = 1.902{,}77 - 760$

$A = 1.142{,}77$

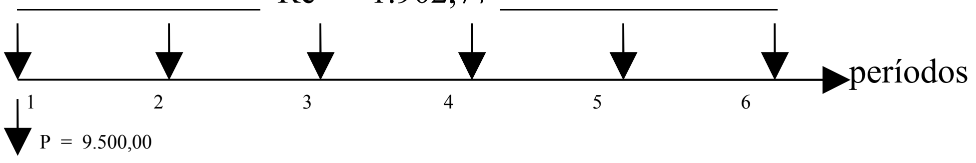
Logo, temos que: a 1ª parcela de entrada é: $Re = 1.902{,}77$

os juros embutidos na 1ª parcela é: $J_1 = 760{,}00$

a amortização da 1ª parcela é: $A_1 = 1.142{,}77$

O diagrama de fluxo de caixa para o sistema Price é dado a seguir:

Re = 1.902,77



b) Pelo sistema de amortização constante (SAC), a amortização em cada parcela é dada pela expressão: $\mathbf{A = P / n}$, onde: $A \rightarrow$ valor amortizado.

$P \rightarrow$ valor do financiamento.

$n \rightarrow$ número de período do financiamento.

$A = P / n$

$A = 9.500 / 6$

$A = 1.583{,}33$

Os juros embutidos na 1ª parcela a pagar são dados por: $\mathbf{J = P \,.\, i}$

$J = 9.500 \times 0{,}08$

$J = 760$

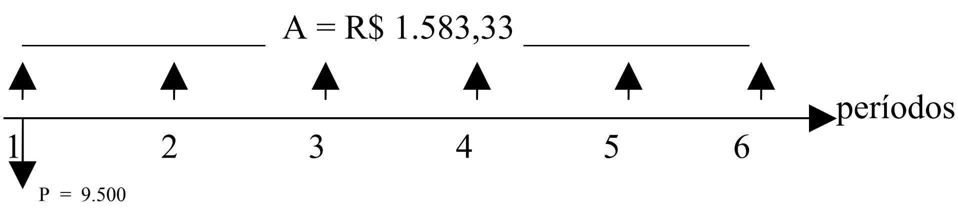
Como em cada parcela já estão incluídos os juros e a amortização devidas, é válida a relação: $R = A + J$

$R = 1.583,33 + 760$

$\mathbf{R = 2.343,33}$

Logo, temos que: o valor da 1ª parcela de entrada pelo SAC é: R$ 2.343,33
o valor amortizado na 1ª parcela é: R$ 1.583,33
o valor dos juros embutidos na 1ª parcela é: R$ 760,00

O diagrama de fluxo de caixa para o sistema SAC é dado a seguir:



c) Neste plano, os juros são pagos no final de cada período.
Usamos a expressão $\mathbf{J = P \cdot i}$, para encontrarmos os juros.
Em cada parcela o valor dos juros pagos é: $J = 9.500 \times 0,08$

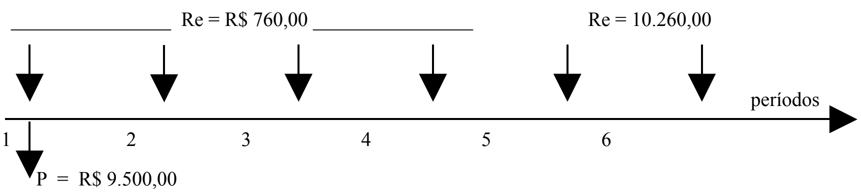
$J = 760,00$

Na última parcela a pagar, além dos juros pagos está incluída o valor financiado de R$ 9.500,00 ; de forma que, o valor da última e sexta parcela a pagar é:

$R_6 = 9.500 + 760$

$R_6 = 10.260,00$

O diagrama de fluxo de caixa para este financiamento é dado a seguir:



d) Para se calcular o valor de cada prestação em P.G., calculamos o valor da 1ª prestação e multiplicamos cada prestação, a partir da 1ª , pela razão da P.G. $q = (1 + i)$ para obtermos as parcelas seguintes.

1) O saldo devedor da 1ª parcela é: $9.500 + (9.500 \times 0,08) =$ **R$ 10.260,00**
O número de prestações a pagar é: 6
O valor da 1ª parcela é: $10.260 : 6 =$ **R$ 1.710,00** $\rightarrow$ $\mathbf{R_1 = 1.710,00}$

O valor da razão é dada por: $q = (1 + i) \rightarrow q = (1 + 0,08) \rightarrow \mathbf{q = 1,08}$

2) O valor da 2ª prestação é: $\mathbf{R_2 = R_1 \cdot q}$

$R_2 = 1.710 \times 1,08$

$R_2 = 1.846,80$

3) O valor da 3ª prestação é: $\mathbf{R_3 = R_2 \cdot q}$

$R_3 = 1.846,80 \times 1,08$

$R_3 = 1.994,54$

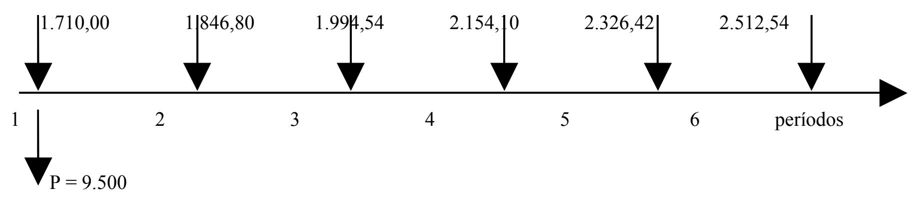
4) O valor da 4ª prestação é: $\mathbf{R_4 = R_3 \cdot q}$
$R_4 = 1.994,54 \times 1,08$
$R_4 = 2.154,10$

5) O Valor da 5ª prestação é: $\mathbf{R_5 = R_4 \cdot q}$
$R_5 = 2.154,10 \times 1,08$
$R_5 = 2.326,42$

6) O valor da 6ª prestação é: $\mathbf{R_6 = R_5 \cdot q}$
$R_6 = 2.326,42 \times 1,08$
$R_6 = 2.512,54$

* O valor de cada parcela é: $R_1 = 1.710,00$ $R_4 = 2.154,10$
$R_2 = 1.846,80$ $R_5 = 2.326,42$
$R_3 = 1.994,54$ $R_6 = 2.512,54$

O diagrama de fluxo de caixa para este plano é dado a seguir:



* Respostas: vide resolução.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01) Um bem imóvel está sendo financiado no valor de R$ 7.700,00 em 6 parcelas iguais com uma taxa de reajuste a 7,5% no período. Determine o valor a liquidar se quiséssemos pagar todas as parcelas no final do período.

02) Um bem está avaliado em R$ 8.800,00 e financiado a taxa de 6,5% de juros com prazo de 4 parcelas. Pelo pagamento periódico de juros, qual o valor da última parcela a pagar ?

03) Um financiamento de R$ 6.900,00 é feito em 5 parcelas iguais com taxa de 8,5% no período. Determinar:
a) o valor das prestações.
b) o valor amortizado na 2ª parcela do financiamento.

04) Um imóvel avaliado em R$ 5.700,00 é financiado em 4 parcelas com taxa de reajuste de 10% no período. Sabendo-se que as parcelas estão em P.G. crescente, determine:
a) o valor de cada prestação.
b) o valor amortizado na 3ª parcela do financiamento.

05) Um financiamento de R$ 10.500,00 é realizado em 5 parcelas com taxa de reajuste de 9,5% no período. Explicitar o financiamento pelo sistema de amortização constante (SAC) e determinar:
a) o valor amortizado em cada prestação.
b) o valor da 2ª prestação.
c) os juros embutidos na 2ª prestação.

d) o restante a pagar após a 4ª parcela paga.

06) Um imóvel avaliado em R$ 9.700,00 é financiado em 4 parcelas com reajuste de 8% no período. Calcule o total pago no final do financiamento(valor nominal equivalente), após ser pago a 4ª e última parcela, se efetuado pelos seguintes planos:

a) pagamento no final do período.
b) pagamento periódico de juros.
c) pagamento de prestações iguais.
d) pelo plano de amortização constante.
e) com prestações crescentes em P.G.

07) Um financiamento de R$ 8.500,00 feito em 4 parcelas tem taxa de 7,5% no período. Determine:

a) o valor de cada parcela se for realizado pelo sistema de prestações iguais (Price).
b) o valor da 2ª parcela se for realizado pelo sistema de amortização constante (SAC).
c) os juros embutidos na 3ª prestação se as parcelas estiverem em P.G. crescente.

08) Um imóvel no valor de R$ 10.100,00 é financiado sem entrada em 5 parcelas iguais a uma taxa de 10% no período. Determinar:

a) o valor de cada parcela a pagar.
b) os juros embutidos na 2ª parcela.
c) a amortização na 3ª parcela paga.
d) o diagrama de fluxo de caixa para o financiamento.

09) Um financiamento no valor de R$ 10.500,00 é realizado em 4 parcelas, sem entrada, com taxa de 9% no período. Determine:

a) o valor de cada prestação do financiamento se for realizado pelo SAC.
b) o valor da amortização em cada parcela do financiamento realizado pelo SAC.
c) o diagrama de fluxo de caixa para o financiamento realizado com pagamento de juros periódicos.

10) Um imóvel no valor de R$ 9.900,00 é financiado em 5 parcelas, com entrada, a uma taxa de 9,55 no período. Determinar:

a) a 1ª parcela de entrada, os juros embutidos e a amortização da 1ª parcela pelo sistema de prestações iguais (Price).
b) o valor amortizado em cada parcela, o valor da 2ª parcela e os juros embutidos na 3ª parcela, pelo sistema SAC de financiamento.
c) o valor das prestações a pagar pelo plano de pagamento periódico de juros. Faça o diagrama de fluxo de caixa.

11) Um financiamento cujo valor principal é R$ 10.000,00 será pago através de 10 prestações mensais iguais a uma taxa de 5% a.m. no regime de juros compostos. Determinar o valor de cada prestação a pagar.

12) Um principal de R$ 100.000,00 deve ser liquidado por 4 prestações semestrais iguais a uma taxa de juros compostos de 3% a.s. Determinar o valor das prestações.

13) Um cidadão resolveu efetuar 6 depósitos trimestrais de R$ 10.000,00 numa instituição bancária que remunera seus depósitos a uma taxa de 12% a.t. sob juros compostos. O primeiro depósito será efetuado nesta data, e os 5 restantes ao fim de cada um dos próximos trimestres. Determinar os saldos acumulados por este cidadão:

a) após seu último depósito.
b) imediatamente antes de seu último depósito.

14) Um bem imóvel avaliado em R$ 9.950,00 é financiado em 4 parcelas, sem entrada, com uma taxa de 10% no período, com prestações crescentes em P.G. Determinar:
a) a explanação do financiamento com as prestações crescentes em P.G.
b) o valor de cada parcela a pagar.
c) o valor total pago ou valor nominal equivalente pago após efetuar-se o pagamento da última parcela.

15) Um financiamento de R$ 10.500,00 é realizado em 5 parcelas, sem entrada, com taxa de 12% no período. Determine o valor das prestações pelo sistema de amortização constante.

16) Um financiamento no valor de R$ 9.600,00 é realizado em 4 parcelas mensais iguais, a uma taxa de 9% no período. Determinar:
a) o valor das prestações do financiamento.
b) o valor amortizado na 2ª prestação paga.
c) o valor total pago ou valor nominal equivalente pago após efetuar-se o pagamento da última prestação.

5.2 - Três Planos Importantes de Financiamentos:

Neste item vamos estudar três planos equivalentes de financiamentos mais importantes. São os três planos de financiamentos que abordaremos a seguir:

- Sistema Price - ou Sistema de Prestações Iguais;
- Sistema de Amortização Constante - SAC;
- Sistema de Amortização Mista - SAM.

5.2.1 - SISTEMA PRICE:

O Sistema Price é um plano de financiamento efetuado com pagamento de parcelas iguais. Todas as prestações do financiamento pelo **Price** são iguais.

Essa modalidade de pagamento de prestações é muito utilizada, tendo aplicação nos seguintes casos:

- Financiamentos imobiliários (sistema financeiro de habitação);
- Crédito direto ao consumidor (financiamento de eletrodomésticos, automóveis, etc)

Chamando de **P** o valor de um financiamento e de **R** o valor das prestações iguais (sem entrada), tomados a uma taxa **i** no período, com **n** parcelas (prestações) a financiar, veremos no Sistema Price as seguintes características:

a) As prestações iguais (constantes), são calculadas pela expressão do fator FPR, no caso das prestações sem entrada, ou seja:

Dado P para achar R, usamos a expressão: R = P . FPR , sendo:

$$\boxed{FPR = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}}$$

Para o caso de financiamento com prestações de entrada, utilizamos a expressão $Re = R / (1 + i)$, para o cálculo do principal P ou das prestações de entrada Re.

Como $R = P \cdot FPR$ e $Re = R / (1 + i)$, logo temos:

$$Re.(1 + i) = P \cdot FPR \qquad \text{ou} \qquad P = \frac{Re.(1 + i)}{FPR}$$

$$Re = \frac{P \cdot FPR}{(1 + i)} \qquad\qquad P = Re \cdot \frac{(1 + i)}{FPR}$$

$$Re = P \cdot \frac{FPR}{(1 + i)}$$

$$\boxed{Re = P \cdot FPRe} \qquad\qquad \boxed{P = Re \cdot FReP}$$

$\boxed{FPRe = FPR / (1 + i)}$ $\rightarrow$ Fator que dado **P** achamos **Re** (prestação de entrada).

$\boxed{FReP = (1 + i) / FPR}$ $\rightarrow$ Fator que dada **Re** encontramos **P**.

Lembramos ainda que para qualquer prestação é válida a relação: $R = A + J$ ou $Re = A + J$.

b) A amortização é crescente. O total amortizado (abatido) é aproximadamente igual ao total financiado.

No Sistema Price as amortizações crescem em progressão geométrica P.G. sendo a razão dessa P.G. dada pela expressão **$q = (1 + i)$**, ou seja, sendo calculado o valor da 1º amortização A_1, as amortizações seguintes poderão ser calculadas pela expressão:

$\boxed{A_n = A_1 \cdot (1 + i)^{n - 1}}$ $\rightarrow$ Amortização em uma prestação paga ou de um período.

c) Os juros são decrescentes e calculados sobre o restante a pagar.

Vejamos agora, através dos Exemplos a seguir, algumas aplicações do sistema de financiamento Price.

01) Exemplo: O financiamento de imóvel no valor de R$ 1.000,00 é feito em 5 parcelas com juros de 7% no período. Determine:

a) o valor das prestações do financiamento.
b) o valor da amortização na 3º prestação.
c) os juros embutidos na 5º parcela.
d) faça uma tabela demonstrativa do financiamento período a período.

* Resolução: Do problema, tiramos os dados: $P = 1.000$
$n = 5$
$i = 7\% = 0,07$
$R = ?$

a) Como no sistema Price todas as prestações são iguais, o valor de cada prestação é dado pela expressão: $R = P \cdot FPR$, sendo:

$$FPR = \frac{(1 + i)^n \cdot i}{(1 + i)^n - 1} = \frac{(1 + 0,07)^5 \cdot 0,07}{(1 + 0,07)^5 - 1} = \frac{(1,07)^5 \cdot 0,07}{(1,07)^5 - 1} = 0,243890694$$

$FRP = 0{,}243890694 \longrightarrow R = P \, . \, FPR$

$R = 1.000 \times 0{,}243890694$

$\mathbf{R = 243{,}89}$

b) O valor da amortização em qualquer prestação é dada por: $A_n = A_1 \, . \, (1 + i)^{n-1}$

Como queremos obter o valor amortizado na 3º prestação, ou seja, A_3 devemos obter o valor de A_1 . Para o cálculo de A_1 usamos a relação: $R_1 = A_1 + J_1$.

J_1 são os juros embutidos na 1º prestação a pagar, sendo obtido pela expressão:

$J_1 = P \, . \, i$

$J_1 = 1.000 \times 0{,}07$

$J_1 = 70$

Logo o valor de A_1 é dado por: $R_1 = A_1 + J_1 \rightarrow 243{,}89 = A_1 + 70$

$A_1 = 243{,}89 - 70$

$A_1 = 173{,}89$

O valor amortizado ou o valor da amortização na 3º prestação é dado pela expressão:

$A_n = A_1 \, . \, (1 + i)^{n-1} \rightarrow A_3 = A_1 \, . \, (1 + 0{,}07)^{3-1}$

$A_3 = 173{,}89 \, . \, (1{,}07)^2$

$\mathbf{A_3 = 198{,}08}$

c) Os juros embutidos na 5º prestação é dado pela relação: $R_5 = A_5 + J_5$

Devemos calcular A_5 pela expressão: $A_5 = 173{,}89 \, . \, (1 + 0{,}07)^{5-1}$

Já temos $A_1 = 173{,}89$ $A_5 = 1713{,}89 \, . \, (1{,}07)^4$

$A_5 = 227{,}93$

Logo para encontrarmos os juros na 5º prestação, temos: $R_5 = A_5 + J_5$

$J_5 = R_5 - A_5$

$J_5 = 243{,}89 - 227{,}93$

$\mathbf{J_5 = 15{,}96}$

d) Demonstrando-se o financiamento através de uma tabela período a período, veremos detalhadamente o fluxo de caixa passo a passo.

A tabela demonstrativa do financiamento é dada a seguir.

n	Principal	Juros	Montante	Prestação	Sald. Deved.	Amortização
1	1.000,00	70,00	1.070,00	243,89	826,11	173,89
2	826,11	57,82	883,93	243,89	640,04	186,07
3	640,04	44,80	684,84	243,89	440,95	199,09
4	440,95	30,86	471,81	243,89	227,92	213,03
5	227,92	15,97	243,89	243,89	zerado	227,92
		*** Total amortizado (liquidado) ....**				1.000,00

*** Nota$_1$:** Montante = Principal + juros

Amortização = Prestação - juros
Saldo devedor (restante a pagar) = Montante - Prestação.

*** Nota$_2$:** Observando as linhas e colunas da tabela, vemos que:

- Em cada linha da tabela, os números 1, 2, 3, ...etc. correspondem ao final do períodos do financiamento, e que de uma coluna para outra, temos o lançamento dos juros, formação do montante, desconto das prestações, restante a pagar e o valor amortizado em cada prestação paga.

- Olhando a coluna **Principal** da tabela, vemos que o valor do financiamento vai-se diminuindo de uma linha para outra (de um período para outro) devido ao desconto efetuado com o pagamento das prestações.

- Na coluna **Juros** da tabela, podemos visualizar também os juros embutidos em cada período do financiamento (ou em cada prestação paga).

- Na coluna **Prestações**, vemos que o valor das prestações são constantes, pois no Sistema Price, temos o financiamento com o pagamento de prestações iguais, ou seja, o Sistema Price é o sistema de prestações iguais.

- Na coluna Amortização, vemos o valor amortizado (abatimento) em cada período ou parcela do financiamento. Na mesma coluna, temos a somatória das amortizações que corresponde igual ou aproximadamente ao valor financiado.

*** Nota$_3$:**

O preenchimento da tabela demonstrativa do financiamento segue em cada linha 1, 2, 3, ...etc, os mesmos passos. Vejamos o preenchimento da **linha 1** (ou 1º período) do financiamento.

Na coluna **Principal**, colocamos o valor do financiamento (1.000,00); na coluna **Juros**, o valor R$ 70,00 foi obtido pela expressão **J = P . i** ; na coluna **Montante**, temos o valor acumulado de R$ 1.070,00 que é o **Principal + Juros** ; a prestação de R$ 243,89 foi obtida pela expressão R = P . FPR que, pelo Price são todas iguais conforme se vê na coluna **Prestação** da tabela; o **Saldo Devedor** de R$ 826,11 foi obtido pela diferença **Montante - Prestação.** A coluna **Amortização** possui os valores embutidos em cada prestação sem os juros. A amortização é o valor dado por conta, para efeito de abatimento, sem os juros devidos. E assim por diante para todas as linhas seguintes da tabela.

É bom notar que em cada linha tem-se o mesmo raciocínio de preenchimento. O saldo devedor ao fim de cada linha corresponde ao início das linhas subsequentes o restante a financiar que, novamente, será acrescido de juros, acumulado, descontado pelas prestações, até ser liquidado (pago) o financiamento ao final do período (ou das prestações pagas).

O preenchimento e a interpretação dos dados na tabela se torna importante de forma que, através da tabela obtemos as respostas do financiamento realizado, dispensando, por outro lado, a utilização total de fórmulas para o cálculo de alguns parâmetros já contidos na tabela. De uma forma ou de outra, utilizando-se as fórmulas ou os dados da tabela preenchida, no que for mais conveniente, podemos responder aos quesitos bastando localizar nas linhas e colunas da tabela a informação desejada.

Veremos isto nos próximos exemplos a seguir.

02) Exemplo: Um imóvel avaliado em R$ 1.500,00 foi financiado no Sistema Price em 4 prestações sem entrada com juros de 5% no período. Faça uma tabela demonstrativa do financiamento período a período e analisando a tabela, determine:

a) o valor das prestações em cada período.
b) os juros embutidos na 2º parcela do financiamento.
c) o saldo devedor no 3º período do financiamento.
d) o valor amortizado na 4º prestação do financiamento.

* Resolução: Do problema tiramos os dados: P = 1.500,00
n = 4
i = 5% = 0,05

Para o cálculo das prestações, usamos a expressão: R = P . FPR, sendo:

$$FPR = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{(1+0{,}05)^4 \cdot 0{,}05}{(1+0{,}05)^4 - 1} = \frac{(1{,}05)^4 \cdot 0{,}05}{(1{,}05)^4 - 1} = 0{,}282011832$$

FPR = 0,282011832 ⟶ R = P . FPR
R = 1.500 x 0,282011832
R = 423,00

A partir dos dados P = 1.500 ; n = 4 ; i = 5% ; R = 423,00 ; preenchemos a coluna **Prestação** com os valores R$ 423,00 . O preenchimento das linhas e colunas restantes começa com o lançamento dos **Juros** sobre o **Principal**, acumulando os juros, descontando as prestações e repassando-se para a linha seguinte o **Saldo Devedor** (ou restante a financiar). Em cada linha da tabela, a **Amortização** é obtida pela diferença **Prestação** menos **Juros**.

n	Principal	Juros	Montante	Prestação	Sald. Deved.	Amortização
1	1.500,00	75,00	1.575,00	**423,00**	1.152,00	348,00
2	1.152,00	**57,60**	1.209,60	**423,00**	786,60	365,40
3	786,60	39,33	825,93	**423,00**	**402,93**	383,67
4	402,93	20,07	423,00	**423,00**	zerado	**402,93**
	*** Total amortizado ....**					1.500,00

*** Nota$_1$:** Montante = Principal + Juros
Amortização = Prestação - Juros
Saldo Devedor = Montante - Prestação

Observe na tabela as respostas aos quesitos em negrito, os quais especificamos:
a) o valor das prestações em cada período é R$ 423,00; ver coluna **Prestação** da tabela.
b) os juros da 2º parcela é R$ 57,60 ; ver coluna **Juros** e **linha 2** da tabela.
c) o saldo devedor no 3º período é R$ 402,93 ; ver coluna **Sald. Deved**. Da tabela.
d) o valor amortizado na 4º prestação é R$ 402,93; ver coluna **Amortização** da tabela.

* Respostas: Vide resolução.

03) Exemplo: Um financiamento é realizado em 5 parcelas iguais, com entrada, de R$ 500,00 e taxa de 6% no período. Elabore uma tabela demonstrativa do financiamento período a período e determine:
a) o valor principal do financiamento.
b) o valor das prestações.
c) os juros embutidos na 3º prestação.
d) valor amortizado no 4º período.

Resolução: Do problema tiramos os dados: Re = 500
n = 5
i = 6% = 0,06
P = ?

O valor do principal financiado é dado pela expressão: P = Re . FReP

FReP = (1 + i) / FPR

$$FPR = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{(1+0,06)^5 \cdot 0,06}{(1+0,06)^5 - 1} = \frac{(1,05)^5 \cdot 0,06}{(1,06)^5 - 1} = 0,2373964$$

FReP = (1 + 0,06) / (0,2373964)
FReP = 4,465105621 ⟶ P = Re . FReP
P = 500 x 4,465105621
P = 2.232,55

Com os dados P = 2.232,55 ; n = 5 ; i = 0,6 e Re = 500,00 ; podemos fazer a tabela colocando na coluna **Prestação** os valores R$ 500,00 . O lançamento dos **Juros** na tabela só começa a partir da **2 linha**, pois temos uma prestação de entrada **Re** que foi paga no ato (na data) da negociação do financiamento.

Vejamos abaixo a montagem da tabela demonstrativa.

n	Principal	Juros	Montante	Prestação	Sald. Deved.	Amortização
1	**2.232,55**	*.*.*	2.232,55	**500,00**	1.732,55	500,00
2	1.732,55	103,95	1.836,50	**500,00**	1.336,50	396,05
3	1.336,50	**80,19**	1.416,69	**500,00**	916,69	419,81
4	916,69	55,00	971,69	**500,00**	471,69	**445,00**
5	471,69	28,31	500,00	**500,00**	zerado	471,69
	*** Total amortizado ....**					2.232,55

*** Nota:** Montante = Principal = Juros
Amortização = Prestação - Juros
Saldo Devedor = Montante - Prestação

Observando-se os dados em negrito na tabela, percebemos que:

a) o valor principal financiado é R$ 2.232,55.
b) valor de todas as prestações são iguais a R$ 500,00
c) os juros embutidos na 3º prestação é R$ 80,19
d) o valor amortizado no 4º período do financiamento é R$ 445,00

5.2.2 - SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE - SAC:

O **Sistema SAC** é um plano de financiamento efetuado com o pagamento de amortizações constantes (iguais). As prestações em cada período são distintas e decrescentes. Começa bem mais alta que no **Price** e termina bem mais baixo.

Esse sistema de financiamento também é conhecido como Método Hamburguês, tendo aplicação nos seguintes casos:

- Financiamento imobiliários (Sistema de Habitação);
- Financiamento às empresas, por parte de várias entidades governamentais.

Chamando-se de **P** o valor de um financiamento e de **A** o valor das amortizações constantes, tomados a uma taxa **i** no período, com **n** parcelas **R** (prestações) financiar, veremos no sistema SAC as seguintes características:

a) A amortização é constante em cada período do financiamento. O total amortizado é igual ao total financiado. No sistema SAC a amortização é dada pela seguinte expressão:

$\boxed{\mathbf{A = P / n}}$ onde: $A \rightarrow$ amortização em cada parcela.
$P \rightarrow$ principal financiado.
$n \rightarrow$ número de parcelas, prestações, período.

b) Os juros sobre o saldo devedor são crescentes. No sistema SAC é válida a relação R = A + J. Entretanto, os juros no SAC se comportam segundo uma progressão Aritmética P. A. decrescente, cujos parâmetros são: primeiro termo $\rightarrow \mathbf{J_1 = P \cdot i}$
razão da P.A $\rightarrow$ $\mathbf{r = - A \cdot i}$

Assim para um período genérico **t**, podemos obter o valor dos juros $\mathbf{J_t}$, em qualquer período, pela expressão a seguir:

$$\boxed{\mathbf{J_t = A \cdot i.(n - t + 1)}}$$

onde: $Jt \rightarrow$ juros num período qualquer (ou juros numa parcela qualquer).
$A \rightarrow$ amortização.
$i \rightarrow$ taxa.
$n \rightarrow$ número de prestações (ou períodos) do financiamento.
$t \rightarrow$ período qualquer do financiamento.

c) As prestações R em um período genérico t será igual a soma da amortização constante com os juros do período t, conforme relação: **R = A + J**. Entretanto, como em qualquer período é sempre válida a relação, temos que:

$R_t = A + Jt \rightarrow Jt = A \cdot i.(n - t + 1).$
$R_t = A + A.i.(n - t + 1).$

$\boxed{\mathbf{R_t = A.[1 + i.(n - t + 1)]}}$, onde: $R_t \rightarrow$ prestação qualquer no período t.
$A \rightarrow$ amortização.
$n \rightarrow$ número de período, parcelas, prestações.
$i \rightarrow$ taxa

01) Exemplo: O Financiamento de imóvel no valor de R$ 2.500,00 é feito em 5 parcelas com juros de 5% no período pelo sistema de amortização constante - SAC. Determine:

a) a amortização em cada parcela.
b) os juros embutidos na 3º prestação.
c) o valor da 4º prestação.
d) elabore uma tabela demonstrativa do financiamento período a período.

* Resolução: Do problema, tiramos os dados: $P = 2.500$
$n = 5$
$i = 5\% = 0,05$
$A = ?$

a) a amortização em cada período (ou parcela) é dada pela expressão: $\mathbf{A = P / n}$

$A = 2.500 / 5$
$A = 500$

b) os juros embutidos na 3 prestação é dado pela expressão: $\mathbf{J_t = A.i.(n - t + 1)}$

$J_3 \rightarrow$ juros da 3º prestação.
$A = 500$
$n = 5$
$t = 3$
$i = 0,05$

$J_3 = 500.\ 0,05.(5 - 3 + 1)$
$J_3 = 75,00$

c) o valor da 4º parcela é dada pela expressão: $\mathbf{R_t = A.[1 + i.(n - t + 1)]}$

$R_4 \rightarrow$ 4º prestação do financiamento
$A = 500$
$n = 5$
$t = 4$
$i = 0,05$

$R_4 = 500.[1 + 0,05.(5 - 4 + 1)]$
$R_4 = 500.[1,10]$
$R_4 = 550,00$

d) A tabela demonstrativa pelo sistema SAC começa pelo preenchimento da coluna Amortização com os valores R$ 500,00 ; pois em cada linha da tabela a amortização é constante (as amortizações são todas iguais).

n	Principal	Juros	Montante	Prestação	Sald. Deved.	Amortização
1	2.500,00	125,00	2.625,00	625,00	2.000,00	**500,00**
2	2.000,00	100,00	2.100,00	600,00	1.500,00	**500,00**
3	1.500,00	**75,00**	1.575,00	575,00	1.000,00	**500,00**
4	1.000,00	50,00	1.050,00	**550,00**	500,00	**500,00**
5	500,00	25,00	525,00	525,00	zerado	**500,00**
*** Total amortizado ....**						2.500,00

Observe os dados em negrito na tabela e compare com as respostas dos itens anteriores.

* Respostas: a) R$ 500,00 b) R$ 75,00 c) R$ 550,00 d) vide resolução.

02) Exemplo: Na tabela abaixo, temos o financiamento de um imóvel pelo sistema SAC. De acordo com os dados da tabela, determine:

a) o valor do financiamento.

b) a taxa de juros de financiamento.
c) o valor da amortização em cada prestação.
d) os juros embutidos na 2º prestação.
e) o valor da 3º prestação paga.
f) o saldo devedor após ser paga a 4º prestação.

Tabela Demonstrativa do Financiamento realizado pelo SAC

n	Principal	Juros	Montante	Prestação	Sald. Deved.	Amortização
1	**3.500,00**	245,00	3.745,00	945,00	2.800,00	**700,00**
2	2.800,00	**196,00**	2.996,00	896,00	2.100,00	**700,00**
3	2.100,00	147,00	2.247,00	**847,00**	1.400,,00	**700,00**
4	1.400,,00	98,00	1.498,00	798,00	**700,00**	**700,00**
5	700,00	49,00	749,00	749,00	zerado	**700,00**
	*** Total amortizado ....**					3.500,00

*** Nota:** Montante = Principal + Juros
Amortização = Prestação - Juros
Saldo Devedor = Montante - Prestação

Observando os dados na tabela, podemos responder aos quesitos propostos.

a) o valor do financiamento está na coluna **Principal** na linha 1 que é **R$ 3.500,00 ;**

b) a taxa de juros do financiamento é obtida pela expressão: **J = P . i,** que calcula os juros da 1º prestação sobre o principal inicial (dados da 1º linha).

Pela expressão, temos: J = P . i
245 = 3.500 . i
i = 245 / 3.500
i = 0,07
i = 7%

c) o valor da amortização em cada prestação é visto na coluna Amortização da tabela. Logo, temos que a amortização é **R$ 700,00**

d) os juros embutidos na 2º prestação são **R$ 196,00** ; ver coluna **Juros** e linha 2 da tabela.

e) o valor da 3º prestação paga é **R$ 847,00** ; ver coluna **Prestação** e linha 3 da tabela.

f) o saldo devedor após ser paga a 4º prestação é **R$ 700,00** ; ver coluna **Sald. Deved.**

Respostas: a) P = R$ 3.500,00 d) j_2 = R$ 196,00
b) i = 7% e) R_3 = R$ 847,00
c) A = R$ 700,00 f) Sd = R$ 700,00

03) Exemplo: Um imóvel avaliado em R$ 10.500,00 é financiado pelo SAC em 6 prestações com 4% de juros no período. Faça uma tabela demonstrativa do financiamento e determine:
a) o valor amortizado em cada parcela.
b) os juros embutidos na 3º prestação.
c) o valor da 4º prestação a pagar.

d) o saldo devedor após ser paga a 5 prestação.

Resolução: Tomando-se os dados do problema, temos: P = 10.500
n = 6
i = 4% = 0,04
A = ?

a) o valor amortizado em cada prestação do financiamento é dado por: **A = P / n**
A = 10.500 / 6
A = 1.750,00

Elaborando a tabela do financiamento pelo sistema SAC, temos:

Tabela Demonstrativa do Financiamento pelo Sistema SAC

n	Principal	Juros	Montante	Prestação	Sald. Deved.	Amortização
1	10.500,00	420,00	10.920,00	2.170,00	8.750,00	1.750,00
2	8.750,00	350,00	9.100,00	2.100,00	7.000,00	1.750,00
3	7.000,00	280,00	7.280,00	2.030,00	5.250,00	1.750,00
4	5.250,00	210,00	5.460,00	1.960,00	3.500,00	1.750,00
5	3.500,00	140,00	3.640,00	1.890,00	1.750,00	1.750,00
6	1.750,00	70,00	1.820,00	1.820,00	zerado	1.750,00
*** Total amortizado ....**						10.500,00

Observando os dados da tabela, podemos responder os itens pedidos.

a) o valor amortizado em cada prestação é **R$ 1.750,00**; ver coluna **Amortização**.

b) os juros embutidos na 3º prestação são **R$ 280,00** ; ver coluna **Juros** e **linha 3** da tabela.

c) o valor da 4º paga é **R$ 1.960,00** ; ver coluna **Prestação** e **linha 4** da tabela.

d) o saldo devedor após ser paga a 5º prestação é **R$ 1.750,00** ; ver coluna **Sald. Deved**.

Obs: No sistema SAC, o preenchimento da tabela começa pela coluna Amortização, colocando-se todos os valores constantes **R$ 1.750,00** . A partir da **linha 1**, inicia-se o lançamento dos **Juros (420,00)** sobre o **Principal (10.500,00)** que vai-se acumulando (**10.920,00**) na coluna **Montante**. Em cada linha da tabela a **Prestação** é obtida pela relação $\mathbf{R_n = A_n + J_n}$ (que no caso, temos: **R** = 1.750,00 + 420,00 = **2.170,00**). O desconto das prestações é lançado na coluna **Sald. Deved.** O saldo devedor no final de uma linha (período) é restante a financiar (principal) no início da linha seguinte. E assim sucessivamente em cada linha da tabela.

* Respostas: Vide resolução acima.

5.2.3 - SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTA - SAM:

O Sistema SAM é um plano de financiamento equivalente aos planos Price e SAC.

Esta é a característica principal do Sistema SAM. O cálculo de prestações e amortizações efetuadas pelo Sistema SAM é feito, respectivamente, pela média aritmética as prestações do Price e Amortizações do SAC.

Notaremos estes detalhes nos exemplos a seguir.

Chamando-se de **P** o valor de um financiamento a ser realizado em **n** prestações **R** a uma taxa **i** de juros no período, veremos no Sistema de Amortização Mista - SAM, as seguintes características:

a) No Sistema SAM, o valor de cada prestação é dado pela média aritmética das prestações do Sistema Price e do Sistema SAC. Ou seja:

$$\text{Prestação do SAM} = \frac{\text{Prestação do Price} + \text{Prestação do SAC}}{2}$$

$$\boxed{\mathbf{R_{SAM} = \frac{R_{Price} + R_{SAC}}{2}}}$$

Veremos que as prestações são decrescentes. Começa mais que no Price e termina mais baixa que no SAC. Termina mais baixa que no Price e mais alta que no SAC. As prestações do Sistema SAM também se comportam segundo uma Progressão Aritmética (P.A.) decrescente, cuja razão é igual a metade da razão no Sistema SAC, ou seja: $\mathbf{r = -\frac{A.i}{2}}$

b) No SAM, o valor das amortizações **A** seguem a mesma lei de formação das prestações, ou seja, cada amortização no SAM também é igual a média aritmética entre as amortizações do Sistema Price e do Sistema SAC. Ou seja:

$$\text{Amortização do SAM} = \frac{\text{Amortização do Price} + \text{Amortização do SAC.}}{2}$$

$$\boxed{\mathbf{A_{SAM} = \frac{A_{Price} + A_{SAC}}{2}}}$$

As amortizações no SAM são crescentes, mas com menos variação que no Price, e o total amortizado é aproximadamente ou igual ao total financiado.

c) Os juros do sistema SAM, calculados sobre o saldo devedor também são decrescentes.

Veremos agora através de alguns Exemplos, algumas aplicações de um financiamento pelo Sistema de Amortização Mista - SAM.

01) Exemplo: Um financiamento no valor de R$ 9.500,00 é feito em 5 parcelas com juros de 7% no período. Sendo esse financiamento realizado pelo Sistema de Amortização Mista - SAM, determine:

a) o valor das prestações.
b) o valor das amortizações em cada parcela.
c) os juros embutidos em cada prestação.

Resolução: Do problema tiramos os dados P = 9.500,00
n = 5
i = 7% = 0,07

a) O valor de uma prestação no SAM é dado pela média aritmética entre as prestações do Price e do SAC. Logo, devemos calcular o valor de cada prestação do Price e do SAC e em seguida efetuar a média aritmética de cada prestação para obtermos as prestações do SAM.

*** Cálculo das Prestações do Sistema Price:**

As prestações do Price é dado pela expressão: **R = P . FPR**

$$FPR = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{(1+0{,}07)^5 \cdot 0{,}07}{(1+0{,}07)^5 - 1} = \frac{(1{,}07)^5 \cdot 0{,}07}{(1{,}07)^5 - 1} = 0{,}243890694$$

FPR = 0,243890694 ⟶ R = P . FPR

R = 9.500,00 x 0,243890694

R = 2.316,96

Todas as prestações do Price são iguais a R$ 2.316,96.

*** Cálculo das Prestações do Sistema SAC:**

As prestações do Sistema SAC é dada pela expressão: **Rt = A.[1 + i.(n - t +1)]**
O valor amortizado em cada parcela é dada por: **A = P / n**, daí temos:

* Valor das amortizações: A = 9.500 / 5
A = 1.900,00

* 1º prestação do SAC: $R_1 = 1.900.[1 + 0{,}07.(5 - 1 + 1)]$
$\mathbf{R_1 = 2.565{,}00}$

* 2º prestação do SAC: $R_2 = 1.900.[1 + 0{,}07.(5 - 2 + 1)]$
$\mathbf{R_2 = 2.432{,}00}$

* 3º prestação do SAC: $R_3 = 1.900.[1 + 0{,}07.(5 - 3 + 1)]$
$\mathbf{R_3 = 2.299{,}00}$

* 4º prestação do SAC: $R_4 = 1.900.[1 + 0{,}07.(5 - 4 + 1)]$
$\mathbf{R_4 = 2.166{,}00}$

* 5º prestação do SAC: $R_5 = 1.900.[1 + 0{,}07.(5 - 5 + 1)]$
$\mathbf{R_5 = 2.033{,}00}$

*** Cálculo das Prestações do SAM:**

$$\boxed{R_{SAM} = \frac{R_{Price} + R_{SAC}}{2}}$$

Tendo agora o valor de cada prestação do Price e do SAC, podemos então calcular o valor das respectivas prestações do SAM. Vejamos:

1º prestação do SAM: $R_1 = \frac{2.316{,}96 + 2.565{,}00}{2} = 2.440{,}98$

2º prestação do SAM: $R_2 = \dfrac{2.316,96 + 2.432,00}{2} = 2.374,48$

3º prestação do SAM: $R_3 = \dfrac{2.316,96 + 2.299,00}{2} = 2.307,98$

4º prestação do SAM: $R_4 = \dfrac{2.316,96 + 2.166,00}{2} = 2.241,98$

5º prestação do SAM: $R_5 = \dfrac{2.316,96 + 2.033,00}{2} = 2.174,98$

Vemos então que o valor das prestações do Sistema SAM são: $\mathbf{R_1 = 2.440,98}$
$\mathbf{R_2 = 2.374,48}$
$\mathbf{R_3 = 2.307,98}$
$\mathbf{R_4 = 2.241,98}$
$\mathbf{R_5 = 2.174,98}$

b) Para calcularmos o valor das amortizações do Sistema SAM, devemos encontrar o valor das amortizações dos Sistemas Price e SAC.

*** Amortizações no Sistema Price:**

No sistema Price as amortizações crescem em progressão geométrica (P.G.)., sendo dadas pela expressão: $\mathbf{A_n = A_1 \cdot (1 + i)^{n-1}}$

A 1º amortização é $\mathbf{A_1}$:
Para o cálculo de A_1 usamos a relação: $R_1 = A_1 + J_1$

$A_1 = R_1 - J_1$

$J_1 = P \cdot i$ $\qquad$ $A_1 = 2.316,96 - 665,00$
$J_1 = 9.500 \times 0,07$ $\qquad$ $\mathbf{A_1 = 1.651,96}$
$J_1 = 665,00$

A 2º amortização é: $A_2 = A_1.(1 + 0,07)^{2-1}$
$A_2 = 1.651,96 \cdot (1 + 0,07)^1$
$\mathbf{A_2 = 1.767,59}$

A 3º amortização é: $A_3 = A_1.(1 + 0,07)^{3-1}$
$A_3 = 1.651,96 \cdot (1 + 0,07)^2$
$\mathbf{A_3 = 1.891,32}$

A 4º amortização é: $A_4 = A_1.(1 + 0,07)^{4-1}$
$A_4 = 1.651,96 \cdot (1 + 0,07)^3$
$\mathbf{A_4 = 2.023,72}$

A 5º amortização é: $A_5 = A_1.(1 + 0,07)^{5-1}$
$A_5 = 1.651,96 \cdot (1 + 0,07)^4$
$\mathbf{A_5 = 2.165,38}$

*** Amortizações no Sistema SAC:**

No sistema SAC as amortizações são constantes (iguais) e dadas pela expressão:

$\boxed{\mathbf{A = P / n}} \longrightarrow$ $A = P / n$

$A = 9.500 / 5$

$\mathbf{A = 1.900,00}$

*** Amortizações no Sistema SAM:**

$$\boxed{\mathbf{A_{SAM} = \frac{A_{Price} + A_{SAC}}{2}}}$$

Tendo agora o valor de cada amortização dos Sistemas Price e SAC, podemos calcular o valor das amortizações do Sistema SAM, pela média aritmética das respectivas amortizações.

1º amortização do SAM $= A_1 = \dfrac{1.651,96 + 1.900,00}{2} = 1.775,98$

2º amortização do SAM $= A_2 = \dfrac{1.767,59 + 1.900,00}{2} = 1.833,79$

3º amortização do SAM $= A_3 = \dfrac{1.891,32 + 1.900,00}{2} = 1.895,66$

4º amortização do SAM $= A_4 = \dfrac{2.023,72 + 1.900,00}{2} = 1.961,86$

5º amortização do SAM $= A_5 = \dfrac{2.165,38 + 1.900,00}{2} = 2.032,69$

Logo, as amortizações no Sistema SAM são: $\mathbf{A_1 = 1.775,98}$

$\mathbf{A_2 = 1.833,79}$

$\mathbf{A_3 = 1.895,66}$

$\mathbf{A_4 = 1.961,86}$

c) Para calcularmos os juros embutidos em cada prestação do SAM, podemos utilizar a relação: **Prestação = Amortização + Juros** $\longrightarrow$ $\mathbf{R_n = A_n + J_n}$

$\mathbf{J_n = R_n - A_n}$

* juros da 1º prestação é: $J_1 = R_1 - A_1$

$J_1 = 2.440,98 - 1.775,98$

$\mathbf{J_1 = 665,00}$

* juros da 2º prestação é: $J_2 = R_2 - A_2$

$J_2 = 2.374,48 - 1.833,79$

$\mathbf{J_2 = 540,69}$

* juros da 3º prestação é: $J_3 = R_3 - A_3$

$J_3 = 2.307,98 - 1.895,66$

$\mathbf{J_3 = 412,32}$

* juros da 4º prestação é: $J_4 = R_4 - A_4$:

$J_4 = 2.241,48 - 1.961,86$

$\mathbf{J_4 = 279,62}$

* juros da 5º prestação é: $J_5 = R_5 - A_5$

$J_5 = 2.174,98 - 2.032,69$

$\mathbf{J_5 = 142,29}$

Vemos então que os juros embutidos em cada prestação do SAM são: $\mathbf{J_1 = 665,00}$

$\mathbf{J_2 = 540,69}$

$\mathbf{J_3 = 412,32}$

$\mathbf{J_4 = 279,62}$

$\mathbf{J_5 = 142,29}$

* Respostas:

a) O valor das prestações são: R1 = R$ 2.440,98
R2 = R$ 2.374,48
R3 = R$ 2.307,98
R4 = R$ 2.241,98
R5 = R$ 2.174,98

b) O valor das amortizações são: A1 = R$ 1.775,98
A2 = R$ 1.833,79
A3 = R$ 1.895,66
A4 = R$ 1.961,86
A5 = R$ 2.032,69

c) Os juros embutidos em cada prestação são: $J_1 = 665,00$

$J_2 = 540,69$

$J_3 = 412,32$

$J_4 = 279,62$

$J_5 = 142,29$

02) Exemplo: O financiamento de um imóvel avaliado em R$ 10.100,00 é liquidado em 5 prestações com juros de 5% no período pelo Sistema de Amortização Mista - SAM. Determinar:

a) As prestações pagas no financiamento.
b) uma tabela demonstrativa do financiamento período a período.
c) os juros embutidos na 2º parcela dofinanciamento.
d) o valor da amortização na 3º prestação.
e) o saldo devedor após ser paga a 4º prestação.

Resolução: Do problema tiramos os dados P = 10.100,00

n = 5

i = 5% = 0,05

a) As prestações do Sistema SAM são decrescentes e estão em P.A. decrescente, cuja razão é igual a $\mathbf{r = \dfrac{-A.i}{2}}$. Para calcularmos as prestações do SAM, encontramos o valor da 1º prestação e somamos a ela a razão **r** para obtermos as prestações seguintes.

*** Cálculo da 1º prestação do SAM:**

- 1º prestação do **Price:** $\mathbf{R_1 = P \cdot FPR}$

$$FPR = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{(1+0{,}05)^5 \cdot 0{,}05}{(1+0{,}05)^5 - 1} = \frac{(1{,}05)^5 \cdot 0{,}05}{(1{,}05)^5 - 1} = 0{,}230974797$$

$FPR = 0{,}230974797 \longrightarrow$

$R_1 = P \cdot FPR$

$R_1 = 10.100 \times 0{,}230974797$

$\mathbf{R_1 = 2.332{,}84}$

- 1º prestação do **SAC:** $\mathbf{R_n = A.[1 + i.(n - t + 1)]}$ $\qquad$ $\mathbf{A = P / n}$

$R_1 = 2.020{,}00 \cdot [1 + 0{,}05(5 - 1 + 1)]$ $\qquad$ $A = 10.100 / 5$

$R_1 = 2.020{,}00[1{,}25]$ $\qquad$ $A = 2.020{,}00$

$\mathbf{R_1 = 2.525{,}00}$

- 1º prestação do **SAM:** $R1 = \dfrac{2.332{,}84 + 2.525{,}00}{2} = 2.428{,}92$

Sendo a razão entre as prestações do SAM dada por $\mathbf{r = \dfrac{-A.i}{2}}$ (metade da razào do SAC), temos:

$r = -\dfrac{A \cdot i}{2} = -\dfrac{2.020{,}00 \times 0{,}05}{2} = -50{,}50 \rightarrow \mathbf{r = -50{,}50}$

- 1º prestação do **SAM:** $\mathbf{R_1 = 2.428{,}92}$

- 2º prestação do **SAM:** $R_2 = R_1 + r$

$R_2 = 2.428{,}92 - 50{,}50$

$\mathbf{R_2 = 2.378{,}42}$

- 3º prestação do **SAM:** $R_3 = R_2 + r$

$R_3 = 2.378{,}42 - 50{,}50$

$\mathbf{R_3 = 2.327{,}92}$

- 4º prestação do **SAM:** $R_4 = R_3 + r$

$R_4 = 2.327{,}92 - 50{,}50$

$\mathbf{R_4 = 2.277{,}42}$

- 5º prestação do **SAM:** $R_5 = R_4 + r$

$R_5 = 2.277{,}42 - 50{,}50$

$\mathbf{R_5 = 2.226{,}92}$

b) Montaremos a tabela demonstrativa do SAM colocando-se as prestações na coluna **Prestações** e fazendo o lançamento dos juros sobre o saldo devedor período a período.

<u>Tabela Demonstrativa do Financiamento pelo Sistema de Amortização Mista - SAM</u>

n	Principal	Juros	Montante	Prestações	Sald. Deved.	Amortização
1	10.100,00	505,00	10.605,00	**2.428,92**	8.176,08	1.923,92
2	8.176,08	**408,80**	8.584,88	**2.378,42**	6.206,46	1.969,62
3	6.206,46	310,32	6.516,78	**2.327,92**	4.188,86	**2.017,60**
4	4.188,86	209,44	4.398,30	**2.277,42**	**2.120,88**	2.067,98
5	2.120,88	106,04	2.226,92	**2.226,92**	zerado	2.120,88
		*** Total amortizado ....**				10.100,00

Observando os dados da tabela, podemos responder aos itens propostos.

c) Os juros embutidos na 2º parcela são **J_2 = R$ 408,80** ; conforme pode ser visto na coluna **Juros** e **linha 2** da tabela.

d) o valor da amortização na 3º parcela é **A_3 = R$ 2.017,60** ; conforme pode ser visto na coluna **Amortização** e **linha 3** da tabela.

e) O saldo devedor após ser paga a 4º prestação é **Sd = R$ 2.120,88** ; conforme pode ser visto na coluna **Sald. Deved.** e linha 4 da tabela.

Obs: O preenchimento da tabela do financiamento pelo Sistema SAM segue os mesmos passos feitos nos Sistemas Price e SAC. Após termos encontrado o valor das prestações do SAM, começamos preenchendo a coluna **Prestações** da tabela. O lançamento dos **Juros** (505,00) inicia-se a partir do **Principal** (10.l00,00) e são acumulados na coluna **Montante**. Do montante descontamos as **Prestações** que são lançados na coluna **Sald. Deved**. E assim sucessivamente em cada linha da tabela.

Respostas: Vide resolução.

03) Exemplo Um financiamento no valor de R$ 11.400,00 é liquidado em 4 prestações com juros de 8% no período. Determine:

a) Uma tabela demonstrativa do financiamento período a período pelo Sistema Price.
b) Uma tabela demonstrativa do financiamento período a período pelo Sistema SAC.
c) Uma tabela demonstrativa do financiamento período a período pelo Sistema SAM.

Resolução: Do problema tiramos os dados $P = 11.400,00$
$n = 4$
$i = 8\% = 0,08$

a) No Sistema Price as prestações são iguais e calculadas pela expressão: **R = P . FPR**

$$FPR = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{(1+0,08)^4 \cdot 0,08}{(1+0,08)^4 - 1} = \frac{(1,05)^4 \cdot 0,08}{(1,08)^4 - 1} = 0,301920804$$

$FPR = 0,301920804 \longrightarrow$ $R = P \cdot FPR$
$R = 11.400 \times 0,301920804$
$\mathbf{R = 3.441,89}$

<u>Tabela Demonstrativa do Financiamento pelo Sistema Price</u>

n	Principal	Juros	Montante	Prestação	Sald. Deved.	Amortização
1	**11.400,00**	912,00	12.312,00	**3.441,89**	8.870,11	2.529,89
2	8.870,11	709,60	9.579,71	**3.441,89**	6.137,82	2.732,29
3	6.137,82	491,02	6.628,84	**3.441,89**	3.186,95	2.950,87
4	3.186,95	254,94	3.441,89	**3.441,89**	zerado	3.186,95
			*** Total amortizado**	**..........**	**..........**	**11.400,00**

*** Nota:** Montante = Principal = Juros
Amortização = Prestação - Juros
Saldo Devedor = Montante - Prestação

b) Para montar a tabela do financiamento pelo Sistema SAC, começamos colocando na coluna **Amortizações** o valor das amortizações e, em seguida efetuamos o lançamento dos **Juros** a partir do **Principal.**

No Sistema SAC, o valor das amortizações é dada pela expressão: **A = P / n**

A = 11.400,00 / 4

A = 2.850,00

Tabela Demonstrativa do Financiamento pelo Sistema SAC

n	Principal	Juros	Montante	Prestação	Sald. Deved.	Amortização
1	11.400,00	912,00	12.312,00	3.762,00	8.550,00	2.850,00
2	8.550,00	684,00	9.234,00	3.534,00	5.700,00	2.850,00
3	5.700,00	456,00	6.156,00	3.306,00	2.850,00	2.850,00
4	2.850,00	228,00	3.078,00	3.078,00	zerado	2.850,00
*** Total amortizado ....**						**11.400,00**

C) Para montarmos a tabela demonstrativa pelo plano SAM, vamos calcular o valor das prestações do SAM pela média aritmética das prestações do Price e do SAC e lançar na coluna **Prestação** da tabela do SAM. O lançamento dos **Juros** inicia-se a partir do **Principal.**

No sistema SAM cada prestação é media aritmética entre as prestações do Price e do SAC.

$$\boxed{\mathbf{R_{SAM} = \frac{R_{Price} + R_{SAC}}{2}}}$$

1º prestação do SAM: $R_1 = \dfrac{3.441,89 + 3.762,00}{2} = 3.601,94$

2º prestação do SAM: $R_2 = \dfrac{3.441,89 + 3.534,00}{2} = 3.487,94$

3º prestação do SAM: $R_3 = \dfrac{3.441,89 + 3.306,00}{2} = 3.373,94$

4º prestação do SAM: $R_4 = \dfrac{3.441,89 + 3.078,00}{2} = 3.259,94$

Tabela Demonstrativa do Financiamento pelo Sistema SAM

n	Principal	Juros	Montante	Prestação	Sald. Deved.	Amortização
1	11.400,00	912,00	12.312,00	3.601,94	8.710,06	2.689,94
2	8.710,06	696,80	9.406,86	3.487,94	5.918,92	2.791,14
3	5.918,92	473,51	6.392,43	3.373,94	3.018,49	2.900,43
4	3.018,49	241,45	3.259,94	3.259,94	zerado	3.018,49
*** Total amortizado ....**						11.400,00

Em cada tabela, o preenchimento teve os mesmos passos.

Na tabela do **Sistema Price**, calculas as prestações e começamos a preencher a coluna **Prestações**. Na tabela do **Sistema SAC**, calculadas as amortizações constantes, começamos a preencher a coluna **Amortização**. Na tabela do **Sistema SAM**, após calcularmos as prestações, começamos pelo preenchimento da coluna **Prestação**.

O lançamento dos **Juros** é feito a partir do **Principal**, sendo acumulados na coluna **Montante**. Do montante descontamos as **Prestações** que são lançados (os descontos) na coluna **Sald. Deved**. O saldo devedor no final de cada linha (**período**) correspondem ao restante a financiar (**principal**) ao início da linha seguinte. E assim sucessivamente em cada linha das tabelas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01) Um financiamento R$ 12.200,00 efetuado pelo Price é liquidado em 6 parcelas com taxa de juros de 7% no período. Determinar:

a) o valor das prestações.
b) os juros da 3º prestação.
c) o valor amortizado na 4 º prestação.

02) O financiamento de um imóvel avaliado em R$ 13.500,00 é liquidado em 5 parcelas iguais, sem entrada, com juros de 5% no período. Determinar:

a) o valor da 3º prestação paga.
b) os juros da 2º prestação.
c) a amortização na 4º prestação paga.

03) Uma casa financiada por R$ 25.500,00 é liquidada em quatro prestações iguais, com entrada, a taxa de juros de 5% no período. Determine:

a) o valor da entrada.
b) os juros embutidos na 3º prestação paga.
c) a amortização na 4º prestação paga.

04) A tabela abaixo demonstra um financiamento de prestações iguais (ou Sistema Price). Observando os dados na tabela, podemos notar o lançamento de juros, formação do montante e o desconto de prestações período a período.

n	Principal	Juros	Montante	Prestação	Sald. Deved.	Amortização
1	12.500,00	875,00	13.375,00	3.048,63	10.326,37	2.173,63
2	10.326,37	722,84	11.049,21	3.048,63	8.000,58	2.325,79
3	8.000,58	560,04	8.560,62	3.048,63	5.511,99	2.488,59
4	5.511,99	385,83	5.897,82	3.048,63	2.849,19	2.662,80
5	2.849,19	199,44	3.048,63	3.048,63	zerado	2.849,19
		*** Total amortizado ....**				**12.500,00**

De acordo com os dados preenchidos na tabela, determine:

a) o valor principal financiado.
b) o número de prestações do financiamento.
c) a taxa de juros empregada no financiamento.
d) o valor das prestações pagas.
e) os juros embutidos na 2º prestação.
f) o valor amortizado na 3º prestação.
g) o saldo devedor após ser paga a 4º prestação.

05) Deseja-se financiar uma moto avaliada em R$ 1.950,00 em 6 prestações iguais, sem entrada, com juros de 7% no período. Determine:

a) o valor das prestações.
b) os juros da 3º prestação.
c) o saldo devedor após a 4º prestação.
d) a amortização na 5º prestação.

06) Deseja-se financiar um imóvel avaliado em R$ 1.500,00 ; com entrada, em "n" prestações iguais, com taxa de 6% no período. Determine o valor das prestações para:

a) n = 5
b) n = 7
c) n = 9
d) n = 12

07) Um financiamento de R$ 10.400,00 é liquidado em 4 parcelas sem entrada pelo Sistema Price, com juros de 5,8% no período. Elabore uma tabela demonstrativa do financiamento com lançamento de juros, formação de montante e desconto de prestações, período a período, e determine:

a) o valor da 2º parcela paga.
b) os juros embutidos na 3º parcela.
c) o saldo devedor após ser paga a 3º pretação.
d) a amortização da 4º parcela.

08) Um artigo é financiado em 4 parcelas iguais de R$ 950,00; com entrada, a juros de 7% no período. Determine:

a) o valor financiado.
b) o valor da entrada.
c) os juros incidentes na 3º prestação.
d) a amortização contida na 4º prestação.

09) Um financiamento no valor de R$ 9.900,00 foi liquidado em 3 prestações mensais iguais, sem entrada, com juros de 6% no período. Qual o valor amortizado na 3º prestação ?

10) Um produto foi financiado em 5 parcelas iguais de R$ 300,00, sem entrada, com juros de 5% no período. Calcular:

a) o valor financiado.
b) o valor da 5º prestação.
c) os juros lançado na 1º prestação.
d) a amortização contida na 2º prestação.

11) Um financiamento de R$ 1.800,00 ; em 6 prestações com juros de 7,5% no período, é feito pelo Sistema SAC. Calcular:

a) a amortização em cada prestação.
b) o valor da 2º prestação.
c) o saldo devedor após ser paga a 4º prestação.
d) os juros incidentes na 5º prestação.

12) O financiamento de um imóvel avaliado em R$ 15.200,00 é liquidado em 4 parcelas, com juros de 7% no período, pelo Sistema SAC. Calcule:

a) o valor amortizado em cada parcela.
b) os juros embutidos na 2º parcela paga.
c) o valor da 3º prestação paga.

13) Um financiamento pelo SAC no valor de R$ 5.600,00 é feito em 5 parcelas com juros de 4,5% no período. Determine os juros:

a) na 3º parcela paga.
b) na 5º parcela paga.

14) Um financiamento de R$ 8.900,00 realizado pelo SAC é liquidado em 4 parcelas, com juros de 5,7% no período. Determine:

a) o valor da 2º parcela paga.
b) o valor da 4 parcela paga.

15) O financiamento de uma casa avaliada em R$ 18.500,00 foi liquidada pelo SAC em 10 parcelas, com juros de 3,5% no período. Calcule:

a) o valor amortizado em cada parcela.
b) os juros pagos na 5º parcela do financiamento.
c) o valor da 7º parcela paga no financiamento.

16) A tabela abaixo demonstra um financiamento pelo plano de amortização constante.

N	Principal	Juros	Montante	Prestação	Sald. Deved.	Amortização
1	10.240,00	409,60	10.649,60	2.969,60	7.680,00	2.560,00
2	7.680,00	307,20	7.987,20	2.867,20	5.120,00	2.560,00
3	5.120,00	204,80	5.324,80	2.764,80	2.560,00	2.560,00
4	2.560,00	102,40	2.662,40	2.662,40	zerado	2.560,00

Observando-se os dados preenchidos na tabela, determine:

a) o valor do principal financiado.
b) o número de períodos do financiamento.
c) a taxa de juros envolvidos no financiamento.
d) o valor amortizado em cada parcela do financiamento.
e) os juros pagos na 2º parcela do financiamento.
f) o valor da 3 º parcela.
g) o saldo devedor após ser paga a 3º parcela.

17) Um financiamento tem as seguintes características:

* Principal: R$ 9.500,00
* taxa empregada no período: 6,5%
* número de prestações iguais com entrada: 4

Determine para este financiamento:

a) o valor da entrada.
b) uma tabela demonstrativa do financiamento, período a período.

18) Financiando-se um imóvel de R$ 1.600,00 em 4 parcelas, com juros de 11% no período, pelo Sistema SAC, quero saber:

a) a amortização em cada prestação.
b) o valor da 3º prestação.
c) o saldo devedor após ser paga a 3º prestação.

19) Um financiamento de R$ 2.500,00 foi liquidado em 5 parcelas pelo Sistema SAC, com juros de 4% no período. Calcular:

a) os juros incidentes na 3º prestação.
b) o valor da 4º prestação paga.

20) Um imóvel no valor de R$ 13.500,00 foi financiado em 5 parcelas nos seguintes casos:

I - a juros de 8% no período pelo Sistema Price.

II - a juros de 7% no período pelo Sistema SAC.

Nestas condições, determine:

a) o valor das prestações no Sistema Price.

b) a amortização da 2º parcela no sistema Price.

c) a amortização em cada parcela pelo Sistema SAC.

d) o saldo devedor após ser paga a 3º parcela no Sistema SAC.

21) Um imóvel avaliado em R$ 2.600,00 foi financiado em 5 parcelas, com juros de 8% no período. Determine:

a) o valor da 1º prestação a pagar, se financiado pelo SAC.

b) o valor da 1º prestação a pagar, se financiado pelo Price.

22) Um financiamento de R$ 9.000,00 foi efetuado pelo Sistema SAM, em 4 parcelas, com juros de 7% no período. Calcule:

a) os juros lançados na 3º prestação.

b) a amortização na 3º prestação.

c) o saldo devedor após ser paga a 3º prestação.

23) Um financiamento no valor de R$ 8.700,00 é feito em 4 parcelas, sem entrada, com juros de 6.5% no período e liquidado pelo Sistema de Amortização Mista - SAM. Determine o valor das prestações.

24) Um financiamento avaliado em R$ 17.200,00 foi liquidado pelo SAM em 10 pretações, com juros de 7,5% no período. Determine:

a) o valor da 1º prestação.

b) o valor da 5º prestação.

c) o valor da 10º prestação.

25) Financiando-se pelo Sistema de Amortização Mista, o principal de R$ 9.700,00 será liquidado em 4 prestações com juros de 10% no período. Elabore uma tabela demonstrativa do financiamento e determine:

a) o valor das prestações pagas.

b) o valor amortizado na 2º prestação.

c) o saldo devedor após ser paga a 3º prestação.

26) O principal de R$ 15.100,00 foi liquidado em 6 parcelas, com juros de 5,6% no período, pelo SAM. Determinar:

a) o valor das prestações pagas.

b) os juros pagos na 1º prestação.

c) o valor amortizado na 1º prestação.

27) Um financiamento foi liquidado pelo SAM em 5 parcelas, com juros de 3% no período. Cada prestação decresce na razão de R$ 60,50. Nestas condições, determinar:

a) o valor financiado.

b) a 1º prestação paga.

c) o valor amortizado na 2º prestação.